

单桩竖向承载力的可靠性分析

栾茂田¹, 辛军霞¹, 吴兴征²



(1. 大连理工大学土木工程系 辽宁 大连 116024;

2. 中国水利水电科学研究院防洪减灾研究所 北京 100038)

摘要: 运用结构可靠性理论, 探讨了单桩竖向承载力的统计分析模式, 推导了其极限状态方程, 并对随机变量的概型分布进行了拟合检验。以浙江地区 70 根桩径均为 800mm 的钻孔灌注桩的试桩资料为例, 对其竖向承载力进行了可靠性分析, 并对可靠性指标与随机变量的关系进行了探讨。

关键词: 单桩竖向承载力; 可靠性; 拟合检验; 随机变量;

0 引言

桩基础是一种历史悠久的深基础形式, 由于其承载力高、沉降小、生命力强而在土木工程中得到了大量的应用。但它的受力机理至今还没有完全弄清楚, 而且与桩基设计有关的各项因素, 如轴向受压容许承载力、各土层的厚度值、各土层与桩壁的极限摩阻力、桩底横截面面积、桩尖处土的极限承载力, 都不会是一个确定的值, 而是不断变化着的随机变量, 因此, 在桩基设计中应当引入可靠性理论, 将各种不定性量化, 使所作的设计更加合理、科学。近二十年来, 国内外学者一直致力于这方面的研究, 并取得了一定的进展, 基础工程结构的设计正在由定值单一安全系数法向考虑各种设计参数不定性的概率法转变。但由于各地土性的变异性很大, 单桩承载力参数的测定和统计取值也还不够科学, 因此, 桩基承载力的可靠性研究工作还需要深入进行。

本文将通过单桩竖向承载力统计分析模式的探讨、极限状态方程的推导、随机变量的统计分析、随机变量概型分布的拟合检验, 对浙江地区 70 根桩径均为 800mm 的钻孔灌注桩的竖向承载力进行可靠性分析, 从而对概率法在桩基设计计算中的应

用作较深入的研究。

1 单桩竖向承载力的可靠性分析

1.1 单桩竖向承载力可靠性分析模式的选取

考虑到应用的广泛性和统计资料积累的数量, 本文选取规范经验值法作为单桩竖向承载力的计算模式, 并以此为基础建立极限状态方程:

$$q_p A_p + U_p \sum q_{si} l_{si} - S_G - S_Q = 0$$

(1) 式中: q_p 为桩端土的极限承载力; q_{si} 为桩周第 i 层的极限摩阻力; S_G, S_Q 分别为恒载效应和活载效应;

在进行可靠度分析时, 原则上应分别考虑材料性能、几何参数、单桩承载力估算模式的不确定性, 但从目前所搜集的大部分资料来看, 土层厚度的不确定性、土层物理指标的测定误差、成桩过程对土层的影响等都无法作出定量分析, 对于桩的几何尺寸, 也基本上没有实测资料, 因此只将资料性能和几何尺寸的影响通过承载力参数的取值差异予以综合考虑。如果忽略计算模式的不确定性, 则承载力参数的变异性可通过单桩总极限承载力 R 的变异性体现出来, 因此极限状态方程可简化为:

$$Z = g(R, S_G, S_Q) = R - S_G - S_Q = 0 \quad (2)$$

即随机变量 R 的统计变异性将与前述的多种变异性有关。

可靠度分析的前提是对极限状态方程中的各随机变量进行参数估计, 得出其统计特性。由于统计工作要求数量足够且条件相同的子样组成样本, 所以不可能对试桩结果直接进行统计。为了解决样本容量不够大的困难, 本文采用了这样一种统计分析模式: 即对静载试验结果 R_0 与按规范经验值法估算的极限承载力标准值 R_{UK} 的比值—试计比 λ_R 作统计分析以定出单桩极限承载力的概率分布和统计参数。这样可使得由于桩的规格不同、土质差异而引起的承载力的差别归一化, 即将不同规格、不同地质条件、不同入土深度的桩得出的试验数据用各自的设计标准值加以统一。

对于不同条件的试桩, R_0 值自然是不同的, 但都可以通过比值 λ_R 按比例折算成具有相同 R_{UK} 的 R_0 值, 从而得到的 R_0 值可以认为属于同一母体的样本, 即

$$R_0 = \lambda_R R_{UK} \quad (3)$$

这里 R_{UK} 视为常数, 因此 R_0 的均值 μ_R 、标准差 σ_R 、变异系数 δ_R 分别为

$$\mu_R = R_{UK} \mu_{\lambda_R} \quad (4)$$

$$\sigma_R = R_{UK} \sigma_{\lambda_R} \quad (5)$$

$$\delta_R = \sigma_R / \mu_R = \sigma_{\lambda_R} / \mu_{\lambda_R} \quad (6)$$

式中: $\mu_{\lambda_R}, \sigma_{\lambda_R}$ 分别为 λ_R 的均值、标准差。

由此可见 R_0 的均值系数 $K_R = \mu_R / R_{UK}$ 就是 λ_R 的均值 μ_{λ_R} , 而 R_0 的变异系数 δ_R 就是 λ_R 的变异系数 δ_{λ_R} 。这样求 R_0 的统计特性就转化为求试计比 λ_R 的统计特性。

1.2 极限状态方程的推导

现行各种结构设计规范的强度计算公式一般可归结为:

$$R_{UK} \geq K(S_{GK} + S_{QK}) \quad (7)$$

式中: R_{UK}, S_{GK}, S_{QK} 分别为结构抗力、恒载效应、活载效应的标准值, K 为安全系

数。对于单桩式(7)可改写为

$$\begin{aligned} R_{UK} &= K(S_{GK} + S_{QK}) \\ &= K(1 + \rho)S_{GK} \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $\rho = S_{QK} / S_{GK}$, 即活载效应同恒载效应标准值之比; $K = 2$ 为安全系数。将式(3)同式(9)相比得

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_{UK}} - \frac{1}{K(1 + \rho)} \frac{S_G}{S_{GK}} - \\ \frac{\rho}{K(1 + \rho)} \frac{S_Q}{S_{QK}} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

一般可取极限承载力 R 为试验值 R_0 , 所以可令

$$\lambda_R = R_0 / R_{UK} \quad (10)$$

$$\lambda_G = S_G / S_{GK} \quad (11)$$

$$\lambda_Q = S_Q / S_{QK} \quad (12)$$

则式(9)可转化为

$$\begin{aligned} \lambda_R - \frac{1}{K(1 + \rho)} \lambda_G - \\ \frac{\rho}{K(1 + \rho)} \lambda_Q = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

由上式可见, 对于式(2)所表示的极限状态方程的可靠度分析已转化为对无量纲随机变量 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 组成的向量的可靠度

分析, 并且可靠指标 β 仅与 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的统计特征及可变荷载效应与永久荷载效应之比 ρ 有关。至此, 只要知道了随机变量 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的统计特征, 便可计算出对应

不同活载和恒载效应比值的可靠指标 β 。

2 单桩竖向承载力的可靠度分析

2.1 随机变量的统计分析

根据试桩资料提供的土层信息, 以试

验所得极限承载力作为 R_0 ，并依据《建筑桩基技术规范 JGJ94-94》得到每根试桩的极限侧阻力标准值和极限端阻力标准值，从而利用式(2)计算出每根试桩的承载力标准值 R_k （相当于容许承载力），再将 R_k 乘以安全系数 K 得到极限承载力的计算值 R_{UK} ，最后取 $\lambda_R = R_0/R_{UK}$ 进行统计^[1]。本章选取浙江地区 70 根桩径均为 800mm 的钻孔灌注桩作为算例^[2]，经过统计分析可得 λ_R 的均值、标准差、变异系数，如表 1 所示。

计算单桩竖向承载力可靠度指标时，除上述的抗力分布外，还要用到桩顶的综合荷载效应分布。这一分布与作用于上部结构的各种荷载性质及其组合、结构及地基的变形情况等因素有关。由于缺乏这方面的实测资料，可以假定荷载与荷载效应存在简单的线性关系，这样便可以用荷载的统计规律来代替荷载效应的统计规律，因此可以借用《建筑结构设计统一标准》GBJ68-84 中对于荷载统计分析的成果。在计算可靠度指标时 需要考虑不同的荷载组合情况。在实际工程中，最常用到的荷载组合是仅有一种可变荷载参与组合的情况，本章采用恒载 G + 办公楼面活载 Q 的组合，依据现行荷载规范可得恒载 G 与可变荷载 Q 的均值、标准差、变异系数，如表 1 所示

在可靠度分析中，随机变量的概型分布对可靠度分析结果的影响极大。由现行荷载规范可知，恒载 G 服从正态分布，可变荷载 Q 服从极值 I 型分布。因此，本文仅利用 χ^2 检验法和 K—S 检验法对试计比 λ_R 的概型分布进行拟合检验^[3]。

① χ^2 检验法

在容量为 n 的样本中，将其中 k 个区间的观测值所出现的 k 个频数 n_1, n_2, \dots, n_k 与区间的理论频数 e_1, e_2, \dots, e_k 相比较，并按下式计算统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} \quad (14)$$

则可根据它的大小来评价上述两种频率吻合程度的好坏，从而也就鉴定出该理论分布假定是否恰当了。当样本容量 $n \rightarrow \infty$ 时，可以证明上式趋近于自由度为 $f=k-1$ 的 χ^2 分布。因此可得

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} < C_{1-\alpha, f} \quad (15)$$

式中 $C_{1-\alpha, f}$ 为 χ^2 分布当累积概率为 $(1-\alpha)$ 时的值，可查表得到。当上式成立时，就认为所设想的理论分布模式在置信限 α 内是可以接受的，否则就拒绝接受。

根据经验，可以用正态分布、对数正态分布来拟合 λ_R 的分布。检验时取置信度 $\alpha = 5\%$ ，因为原假设 $N(\mu, \sigma)$ 中两个参数 μ 和 σ 均为未知，所以自由度 $f = k - 1 - 1 = 7 - 1 - 2 = 4$ ，查 χ^2 表得临界值 $C_{1-\alpha, f} = C_{95, 4} = 9.49$ 。由计算可知，当 λ_R 服从正态分布时，其 χ^2 值为 $9.7494 > 9.49$ ，而当 λ_R 服从对数正态分布时，其 χ^2 值为 $1.735 < 9.49$ ，因此可判断 λ_R 服从对数正态分布。

② K—S 检验法

K—S 检验法的基本思路是根据子样得到的经验分布函数 $F_n(x)$ 与原假设的总体的理论分布函数 $F_0(x)$ 作比较，建立统计量 D_n ，即

$$D_n = \max_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F_0(x)| \quad (16)$$

$$= \max_{-\infty < x < +\infty} D_n(x)$$

然后在给定的置信度 α 下，将计算得到的 $D_n(x)$ 的最大值与 K—S 检验法的临界值 $D_{n, \alpha}$ 比较以检验原假设是否被拒绝：

当 $D_n < D_{n, \alpha}$ 时，不拒绝接受原假设；

当 $D_n > D_{n, \alpha}$ 时，拒绝接受原假设。

下面将用 K—S 检验法来检验 λ_R 是否服从极值 I 型分布。

① 计算得 $\mu = 1.0571$ ， $\sigma = 0.2942$ ；

② 计将观测值 x_i 由小到大重新排列；

③ 算统计频数 m_i 和累积频数 $\sum m_i$ ，用式

$F_n(x_i) = (\sum m_i - 0.5)/n$ 计算统计概率分布函数;

④ 极值 I 型分布函数为

$$F(x) = \exp\{-\exp[-a(x-u)]\} \quad (17)$$

式中参数 a 和 u 可根据均值和标准差估计如下:

$$a = \frac{\pi}{\sqrt{6}\sigma} = 4.357$$

$$u = \mu - \frac{0.5772}{a} = 0.925$$

于是提出假设 H:

$$F(x) = \exp\{-\exp[-4.357(x-0.925)]\} \quad (18)$$

并由此计算 $F_X(x)$ 值;

⑤ 计算 D_n 值;

$$D_n(x)_i = |F_X(x_i) - F_n(x_i)| \quad (19)$$

由计算可知, $\max D_n(x) = 0.055586$

⑥ 判断: 显著水平为 5%, 样本容量为 70, 查表得 $D_{70,0.05} = 0.1626$, 因 $0.055586 < 0.1626$, 故可判断 λ_R 服从极值 I 型分布。

表 1 各随机变量的统计值

变量	均值	标准差	变异系数	分布类型
λ_R	1.057	0.294	0.278	对数正态分布
λ_G	1.06	0.074	0.07	正态分布
λ_Q	0.7	0.203	0.29	极值 I 型分布

2.2 可靠度指标的计算

将上述各统计值代入自编的程序 Z H J, 经迭代可得对应于不同的 ρ 值的可靠度指标 β , 如表 2 和图 1 所示。

表 2 对应于不同的 ρ 值的可靠度指标 β

ρ	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
β	6.93	7.31	7.53	7.67	7.78

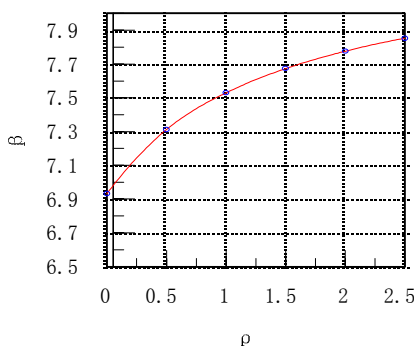


图 1 $\rho \sim \beta$ 关系曲线

3 可靠度指标与随机变量关系

由于可靠度指标 β 的值与 ρ 的值密切相关, 其关系已在上面作了分析, 因此在下面的分析中固定 $\rho = 1.0$, 仅分析 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的均值、标准差对 β 的影响。

(1) $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的均值对 β 的影响

以上面的算例为研究对象。当其中一个参数的均值变化而其它参数不变时, β 将随之变化。图 2 分别为一组 $\mu_{\lambda_R} \sim \beta, \mu_{\lambda_G} \sim \beta, \mu_{\lambda_Q} \sim \beta$ 关系曲线。由图可见, $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的均值与 β 都呈线性关系, β 值随 λ_R 的均值的增大而增大, 随 λ_G, λ_Q 的均值的增大而减小; λ_R 对 β 的影响较大, λ_G, λ_Q 对 β 的影响较小, 且二者的影响程度相当。

(2) $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的变异系数对 β 的影响

当 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 中之一的变异系数变化而其它参数不变时, β 将随之变化。图 3 分别为一组 $\delta_{\lambda_R} \sim \beta, \delta_{\lambda_G} \sim \beta, \delta_{\lambda_Q} \sim \beta$ 关系曲线。由图可见, β 随 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的变异系数的增大均减小, β 与 μ_{λ_R} 呈线性关系, 且 μ_{λ_R} 对 β 的影响较显著, 而 β 与 $\mu_{\lambda_G}, \mu_{\lambda_Q}$ 呈曲线关系, 且 $\mu_{\lambda_G}, \mu_{\lambda_Q}$ 对 β 的影响不显著。

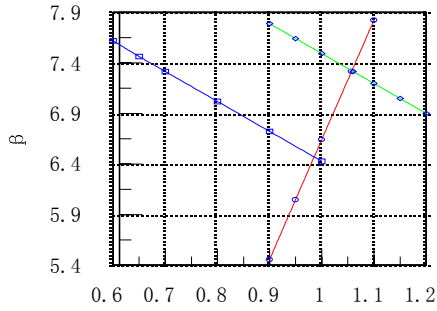


图2 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的均值对 β 的影响

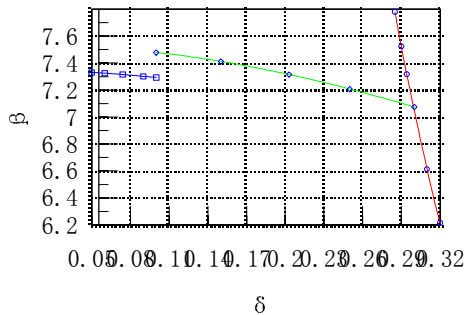


图3 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的变异系数与 β 的关系

4 结语

通过对随机变量概型分布的拟合检验，可以看出，随机变量的概型分布对可

靠度指标 β 的影响非常大，在可靠性分析中，应该对随机变量的概型分布进行拟合检验；

由单桩承载力极限状态方程的推导和对应于不同活载和恒载效应比值的可靠指标 β 的计算可知，可变荷载效应与永久荷载效应之比 ρ 值对可靠度指标的影响非常明显， ρ 值越大， β 值越大，但二者并不成线性关系。因此，在进行可靠性分析时，要合理选取可变荷载效应与永久荷载效应之比 ρ 值；

$\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的均值、标准差对可靠度指标 β 都有影响， $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的均值与 β 呈线性关系， β 值随 λ_R 的均值的增大而增大，随 λ_G, λ_Q 的均值的增大而减小， λ_R 对 β 的影响较大， λ_G, λ_Q 对 β 的影响较小，且二者的影响程度相当； β 随 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_Q$ 的变异系数的增大均减小， β 与 μ_{λ_R} 呈线性关系，且 μ_{λ_R} 对 β 的影响较显著，而 β 与 $\mu_{\lambda_G}, \mu_{\lambda_Q}$ 呈曲线关系，且 $\mu_{\lambda_G}, \mu_{\lambda_Q}$ 对 β 的影响不显著。

参考文献:

- [1] 于晓冬. 天津市单桩竖向承载力的可靠度分析[D]. 天津: 天津大学, 1996.
- [2] 张忠苗. 基于桩顶沉降和桩端沉降的受力分析及用桩端注浆提高桩承载力研究[D]. 杭州: 浙江大学, 1999.
- [3] 祝玉学. 边坡可靠性分析[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1993.

Reliability analysis of vertical pile bearing capacity

Luan Mao-tian¹, Xin Jun-xia¹, Wu Xing-zheng²

(1. Department of Civil Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

(2. China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100038, China)

Abstract: Using theory of reliability of structures, the modula of vertical pile bearing capacity and the limit state function of it are studied. Test of goodness of fit of random variables is also done. On the basis of the information of seventy piles in Zhejiang whose diameter is 800mm, reliability of vertical pile bearing capacity is analyzed, and relation between random variables and reliability index is also studied.

Key words: vertical pile bearing capacity; reliability; test of goodness of fit; random variable