5 地下工程数值计算方法 3rd

4 地下建筑结构的计算方法

5 地下建筑结构的可靠度理论 2nd

以往地下（隧道）工程被认为是以经验为主的学科，是一种“工艺”而不是一种“科学”。这是因为岩土介质作为隧道工程的对象包含着多种随机因素(例如：非均匀性和各向异性，地质构造和结构面，应力-应变的非线性本构关系，初始地应力，地下水等等)，正确掌握这些因素及其变化规律非常困难。因而试图按经典的弹性力学方法获得解析解是十分困难的，甚至是不可能的。因此寻求近似解法就成了必由之路。经过多年的探索，近似算法有许多种，常用的数值分析方法是有限元法（Finite element method，FEM）、有限差分法（Finite difference method，FDM）、边界元法（Boundry element method，BEM）、变分法（Variation method，VM）和加权余量法（Weighted residual method，WRM）。

本讲内容

5.1 有限单元法

5.2 有限差分法

5.3 离散单元法

5.4 算例

数值方法通常分为基础方法（求根 函数积分 求解线性方程组）和高级方法（有限单元法）

数值方法代表了最通用、最复杂的地下工程计算机模拟方法，随着计算机软硬件的日趋先进，数值计算方法在隧道和岩土工程的运用与日俱增

本章主要阐述数值计算方法的基本原理和应用范围，为地下工程中的数值分析提供一定的理论和应用的分析基础

P87

5.1 有限单元法

5.1.1 发展历史

有限元法的概念可以追溯到20世纪40年代。1943年，Courant第一次在他的论文中，取定义在三角形分片上的连续函数，利用最小势能原理研究了St.Venant的扭转问题。1956年，Turner，Clough，Martin和Topp等人在他们的论文中第一次给出了用三角形单元求得的平面应力问题的真正解答。他们利用弹性理论的方程求出了三角形单元的特性，并第一次介绍了今天人们熟知的确定单元特性的直接刚度法。

“有限元法”这个名称，第一次出现在1960年，当时Clough在一篇平面弹性问题的论文中应用过它。工程师们开始认识了有限元法的功效，此后有限元法在工程界获得了广泛的应用。到20世纪70年代以后，随着计算机和软件技术的发展，有限元法也随之迅速地发展起来。

到目前为止，有限元法已被应用于固体力学、流体力学、热传导、电磁学、声学、生物力学等各个领域；能进行由杆、梁、板、壳、块体等各类单元的弹性、弹塑性、塑性或粘性问题的求解，包括静力和动力问题；能解决土力学、岩石力学、断裂力学等问题；能求解流体场、温度场、电磁场等场分布问题的稳态和瞬态问题；还能求解水流管路、电路、润滑、噪声以及固体、流体、温度相互作用问题。

有限元法软件简介

有限元法软件

- **大型通用软件**：其特点就是“通用性”。单元库内一般常用单元齐全，如杆单元、梁单元、膜单元、板单元、壳单元、轴对称单元、实体单元、边界元等。功能库内分析模块众多，应用范围广泛。
- **专用软件**：它是为解决某一类学科问题，如接触问题、优化问题、弹塑性问题等，或是解决某一类产品基础件的计算分析问题等而发展起来的。其规模一般比较小，解决问题比较专一，适合在小型及微型计算机上运行。
- **自编特殊软件**：此类软件主要应用在科研和教学上。这类程序不用特别技巧，只要说明问题即可，规模不大。

有限元软件发展很快，我国已引进的主要软件有：ANSYS，SAP，ADINA，ABACUS，PLAXIS，Midas等，许多软件具备了前、后处理功能，这不仅提高了解题速度，还极大地方便了使用者，对有限元法的普及与应用起了很大的促进作用。

5.1.2 弹性力学的基本方程及虚功原理

有限单元法是以变分原理为基础的连续介质数值计算方法，其能量方程推导的理论基础是弹性力学的基本方程和虚功原理。

（一）弹性力学的基本方程

1 几何方程

2 物理方程

3 平衡方程

P88

1 几何方程

单元分析是用单元节点位移表示单元内任一点处的力学特性。下面以3节点三角形单元为例说明单元分析的过程。

(1) 节点位移与节点力 为分析方便，如图5-1所示，建立笛卡儿坐标系。节点i , j, m按逆时针编号。对于平面应力问题，每个节点有两个自由度，分别为沿x轴的线位移和沿y轴的线位移。单元节点位移用矩阵的形式表示为

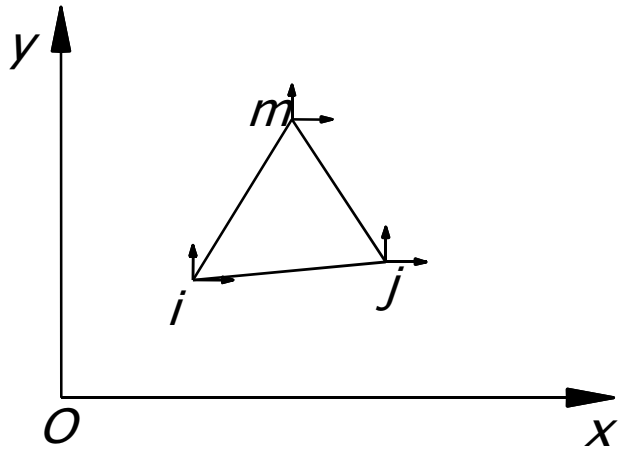


图5-1　3节点三角形单元

$$\boldsymbol{\delta}^e = \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j & u_m & v_m \end{bmatrix}^T \tag{5-1}$$

与位移对应的单元节点力用矩阵的形式表示为

$$\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i & V_i & U_j & V_j & U_m & V_m \end{bmatrix}^T \tag{5-2}$$

(2) 位移函数 单元内各点的位移变化可表示为一个连续函数，由泰勒展开式可知，满足一定条件的连续函数可以展开成多项式的形式。有限元分析时所称位移函数即以节点位移为已知量来描述单元内任一点处位移的插值多项式函数。现假设单元内任一点处的位移和为坐标的线性函数

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v(x,y) &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3)$$

式（5-3）中的6个待定系数a1～a6可以用单元的6个节点位移确定，即

在 i 节点 $u(x_i, y_i) = u_i$ $v(x_i, y_i) = v_i$

在 j 节点 $u(x_j, y_j) = u_j$ $v(x_j, y_j) = v_j$

在 m节点 $u(x_m, y_m) = u_m$ $v(x_m, y_m) = v_m$

将上6个式子代入式（5-3）可解出待定系数a1～a6。再将解出的待定系数a1～a6代入式（5-3）整理成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \tag{5-4}$$

即 $$f^e = N\delta^e \tag{5-5}$$

式中 N—单元形函数矩阵；

δ^e —位移函数的矩阵表示；

Ni—形函数，可由下式计算

$$N_i = \left[(x_j y_m - x_m y_i) + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j)y\right]/2A \quad (i,j,m) \tag{5-6}$$

式中 A—单元面积，即 $A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}$

式（5-6）后面附有记号(i,j,m)表示一个公式实际代表三个公式，其余两个公式可轮换下标i,j,m得到。以后将经常采用这种表示法。

(3) 节点位移与应变的关系 由弹性力学平面应力问题的几何方程可知

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}7)$$

P88 式（5-1）

写成矩阵式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} \tag{5-8}$$

把式（7-4）代入式（7-8）得

$$\varepsilon=\partial f^e=\partial N\delta^e=B\delta^e \tag{5-9}$$

式中　B—几何矩阵

P88

2 物理方程

(4) 节点位移与应力的关系 由弹性力学平面应力问题的物理方程（虎克定律）可知

$$\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=D\varepsilon \tag{5-10}$$

式中 E—材料的弹性模量；

mu—材料的泊松比；

D —弹性矩阵。

将式(5-9)代入式(5-10)得

$$\sigma=DB\delta^e=S\delta^e \tag{5-11}$$

式中 S—应力矩阵。

3 平衡方程

平衡方程是描述外力作用下单元体内应力和外力的平衡微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases} \tag{5-3}$$

+Fx作用在单元体上的体力

P89

（二）最小势能原理与虚功方程

(5) 节点位移与节点力的关系 设弹性体发生虚位移，单元结点的虚位移为δ^{*e}，相应的虚应变为ε^{*}。由弹性体的虚位移原理知：外力作用下处于平衡状态的弹性体，外力在任意虚位移上所做的虚功等于弹性体整个体积内的应力在虚应变上所做的功。即

$$\left(\delta^{*e}\right)^{\mathrm{T}} F^{e} = \iint \left(\varepsilon^{*}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{5-12}$$

式中　　t—弹性体的厚度。

P89

将式(5-9)和式(5-11)代入式(5-12)得

$$\left(\delta^{*e}\right)^{\mathrm{T}} F^{e} = \iint \left(\delta^{*e}\right)^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} D B \delta^{e} t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (5\text{-}13)$$

由于虚位移为任意值，而实位移是节点位移，与坐标无关，故式（5-13）可得

$$F^{e} = \left(\iint B^{\mathrm{T}} D B t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\delta^{e} = K^{e}\delta^{e} \qquad (5\text{-}14)$$

其中

$$K^{e} = \iint B^{\mathrm{T}} D B t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (5\text{-}15)$$

式中 Ke—单元刚度矩阵，它是一个方阵，其行数和列数均等于单元节点的位移分量。

P89 自行看书

5.1.3 有限单元法的基本思想

利用整个结构在各节点处的静力平衡条件和变形协调条件对整个结构进行分析，以建立结构的刚度方程组。为了使得建立的整体刚度方程规格化，可暂不考虑支承条件。

(1) 单元贡献矩阵 如图5-2所示，单元①的单元刚度矩阵方程组的分块表示形式为

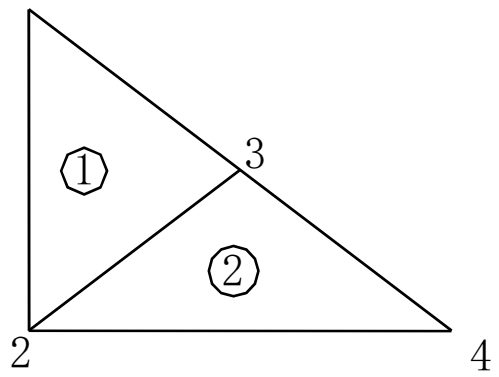


图5-2　平面问题模型

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^{①} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}^{①} \tag{5-16}$$

将其扩阶到整个结构的所有节点下的关系为

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}^{①} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}^{①} \tag{5-17}$$

同理单元②的单元刚度方程组扩阶到整个结构的所有节点下的关系为

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}^{②} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}^{②} \tag{5-18}$$

式(5-17)和式(5-18)可简写为

$$\widetilde{F}^e = \widetilde{K}^e \widetilde{\delta}^e \quad (e=①，②) \tag{5-19}$$

式中 $\widetilde{F}^e$，$\widetilde{K}^e$，$\widetilde{\delta}^e$ —单元e的节点力、单元刚度和节点位移贡献矩阵。

由节点处的变形协调条件可知，节点在任一单元内的变形相等，均等于该节点在结构内的实际变形。即 $\delta_i^e = \delta_i$ ，亦即 $\widetilde{\delta}^e = \delta^e$

另外，由节点处的静力平衡条件可知，节点处的合内力等于作用在节点处的外载荷。即

$$\sum_e \widetilde{F}^e = P \tag{5-20}$$

式中 $\sum_e$ —对所有单元求和；

P—外载荷向量。

把式（5-19）代入式（5-20）得

$$\sum_{e} \widetilde{K}^{e} \delta = P$$

$$K\delta = P \tag{5-21}$$

式中　K—整体刚度矩阵，它等于各单元刚度贡献矩阵之和。

(2) 整体刚度矩阵的集成原则 对图5-2所示的平面问题，其刚度矩阵为

$$K = \widetilde{K}^{①} + \widetilde{K}^{②} = \begin{bmatrix} K_{11}^{①} & K_{12}^{①} & K_{13}^{①} & 0 \\ K_{21}^{①} & K_{21}^{①+②} & K_{23}^{①+②} & K_{24}^{②} \\ K_{31}^{①} & K_{32}^{①+②} & K_{33}^{①+②} & K_{34}^{②} \\ 0 & K_{42}^{②} & K_{43}^{②} & K_{44}^{②} \end{bmatrix} \tag{5-22}$$

由此可见，整体刚度矩阵可按以下原则集成：

$$K_{ij} = \sum_{e} K_{ij}^{e_{ij}}$$ （节点i,j相关，即共同组成单元）

$$K_{ij} = 0$$ （节点i,j不相关）

式中 $K_{ij}^{e_{ij}}$ —节点i,j共同组成的单元eij的对应子块。

(3) 荷载移置

整体分析时的刚度方程组是根据外载荷作用在节点得出的。如果有不在节点上的外载荷，则必须用虚功等效原则（即等效前后载荷在任何虚位移方向上的虚功相等）将载荷移置到节点上。这一工作称为载荷移置。

对于集中力，由于单元的划分是随意的，一般可将集中力的作用点取为结点，集中力就成为结点荷载。

下面仅经给出常见的几种荷载移置结果。在采用线性位移模式时，对三结点三角形单元，荷载移置可按平行力的合成与分解进行。

如图5-3a所示的jm边上作用着均布荷载，荷载集度为q，单元厚度为t，移置到j和m点的荷载各为qLt/2。图5-3b所示的三角形分布荷载作用时，j，m点的等效结点荷载各为qLt/3和qLt/6，图5-3c所示的受均布体力的三角形单元，如果体力的合力为W，则每个结点的等效荷载各为W/3。

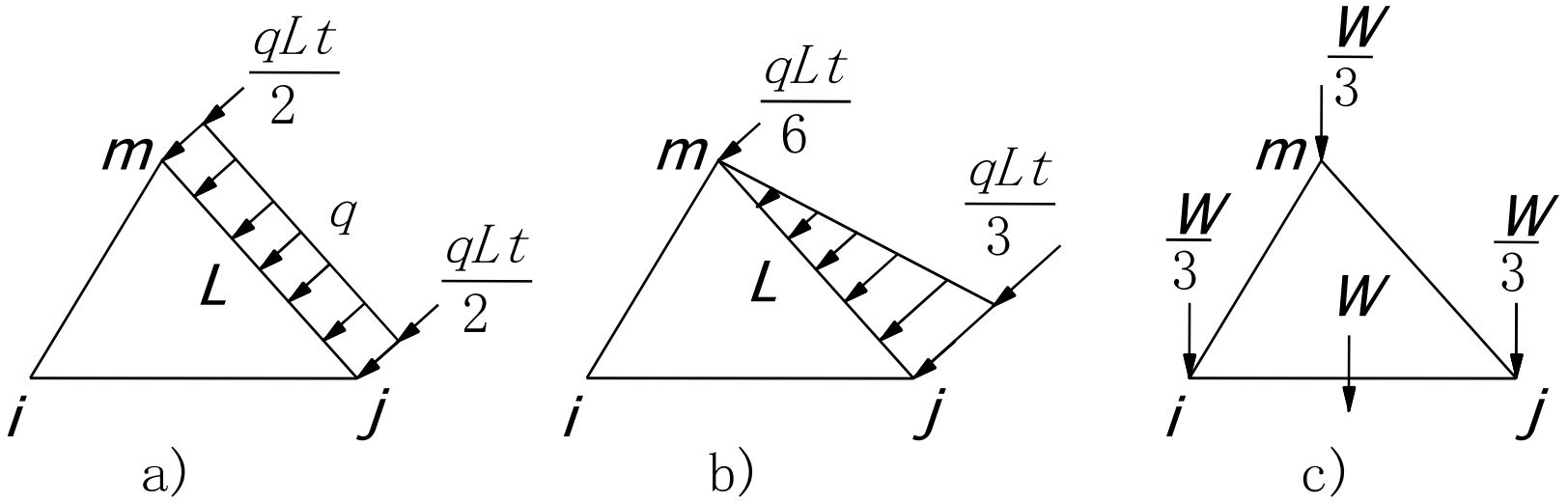


图5-3　荷载移置

(4) 引入支撑条件

由于在整体分析时，没有考虑体系的支撑情况，因此体系刚度方程组中的整体刚度矩阵K在数学上具有奇异性，即其逆矩阵不存在。也就是说由此方程不能求得位移的唯一解。在力学上这是由于在引入支撑条件之前，体系还是一个没有支撑的悬空结构。所以必须引入支撑条件对体系方程组进行处理，使体系刚度方程组有唯一解。常用的处理方法有：消行消列法、置大数法和置一法。

(5) 解方程组求结点位移

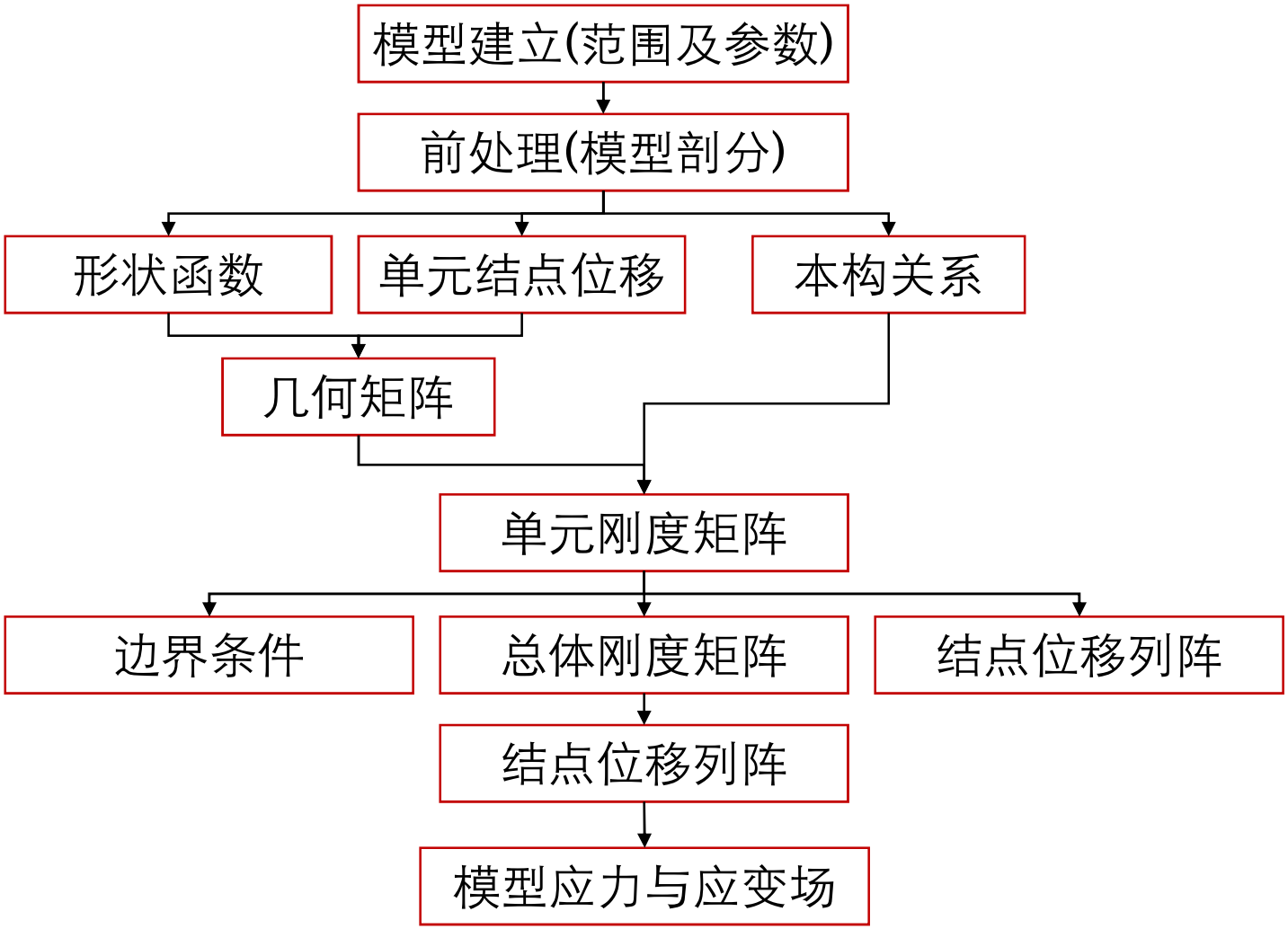
体系引入支撑条件后整体刚度方程组有唯一解，一般可用高斯消去法求解线性方程组，得结点位移。

(6) 求单元应力

结点位移求出后，可利用式（5-11）求出单元应力。

P91 最后总结迭代求解较好

◆ 有限元法的实现



P92 图5-2 有限单元法计算流程

5.1.4 应用实例

1、盾构隧道的施工引起的土体表面变形分析 Plaxis V8

一起看书

2、分阶段开挖和衬砌的隧道弹塑性有限元静力分析

3、锚杆与围岩相互作用的弹塑性有限元分析

P91-96 一起看书

非线性问题的求解方法

采用数值方法分析结构时，将结构离散化后可以得到上一节中建立的代数方程组，即式（7-21）变形为：

$$K\delta - P = 0 \tag{7-23}$$

当总刚度矩阵K中的元素Kij为常量时，式（7-23）为线性方程组，它所代表的问题为线性问题。当Kij为变量时，例如Kij=f(dij)，则式（7-23）为非线性方程组，它所描述的问题为非线性问题。

材料非线性:指的是当应力超过某一限值后，应力与应变的变化不成线性关系，但应变与位移的变化仍成线性关系。属于这种类型的问题称为材料非线性问题。

几何非线性：指的是当应变或应变速率超过某一限值后，应变与位移的变化不成线性关系，但应力与应变的变化仍成线性关系。属于这种类型的问题称为几何非线性问题。

岩土材料的弹塑性本构关系

几种常用的屈服准则

目前常用于岩土材料的屈服准则有：摩尔-库仑(Mohr-Coulomb)屈服准则，德鲁克-普拉格(Drucke-Prager)屈服准则，辛克维奇-潘迪(Zienkiewicz-Pande)屈服准则等。

(1) 摩尔-库仑(Mohr-Coulomb)屈服准则

库仑式 $$f = \tau - \sigma tg\varphi - c = 0 \tag{7-24a}$$

摩尔式 $$f = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi - 2c \cdot \cos\varphi = 0 \tag{7-24b}$$

式中 σ和τ——剪切面上的正应力和剪应力；

c和φ ——屈服或破坏参数，即材料的粘聚力和内磨擦角。

摩尔-库仑屈服准则的物理意义在于：当剪切面上的剪应力与正应力之比达到最小时材料发生屈服与破坏。最大优点是不仅能反映岩土材料的拉伸与压缩的屈服与破坏强度不同（S-D效应）与对静水压力的敏感性，而且简单实用。因此在岩土力学和塑性理论中得到广泛应用。但该准则不能反映中间主应力对屈服和破坏的影响及单纯的静水压力可以引起岩土屈服的特性，而且屈服曲面有棱角，不便于塑性应变增量的计算，这就给数值计算带来了困难。

2、分阶段开挖和衬砌的隧道弹塑性有限元静力分析

某铁路隧道埋深约40m，采用全断面新奥法施工，共分为三个施工阶段：

第一阶段开挖全断面至边墙底面水平，并喷射10cm厚的混凝土初期支护，假定本阶段内释放荷载占总释放荷载的40%。

第二阶段施做30cm厚的内层混凝土衬砌（二衬），由边墙到拱圈一次性完成，假定本阶段内释放荷载占总释放荷载的40%。

第三阶段开挖底部并浇灌40cm厚的仰拱混凝土，假定本阶段内释放荷载占总释放荷载的20%。

图7-6为采用的有限元离散化体系，其中上覆层用换算均布荷载400kN/m2代替，仅用于计算围岩初始应力场，如图7-6a所示。采用8节点等参数单元。体系顶面无约束，左右两侧水平约束，底面竖向约束。图7-6b～d表示开挖轮廓线

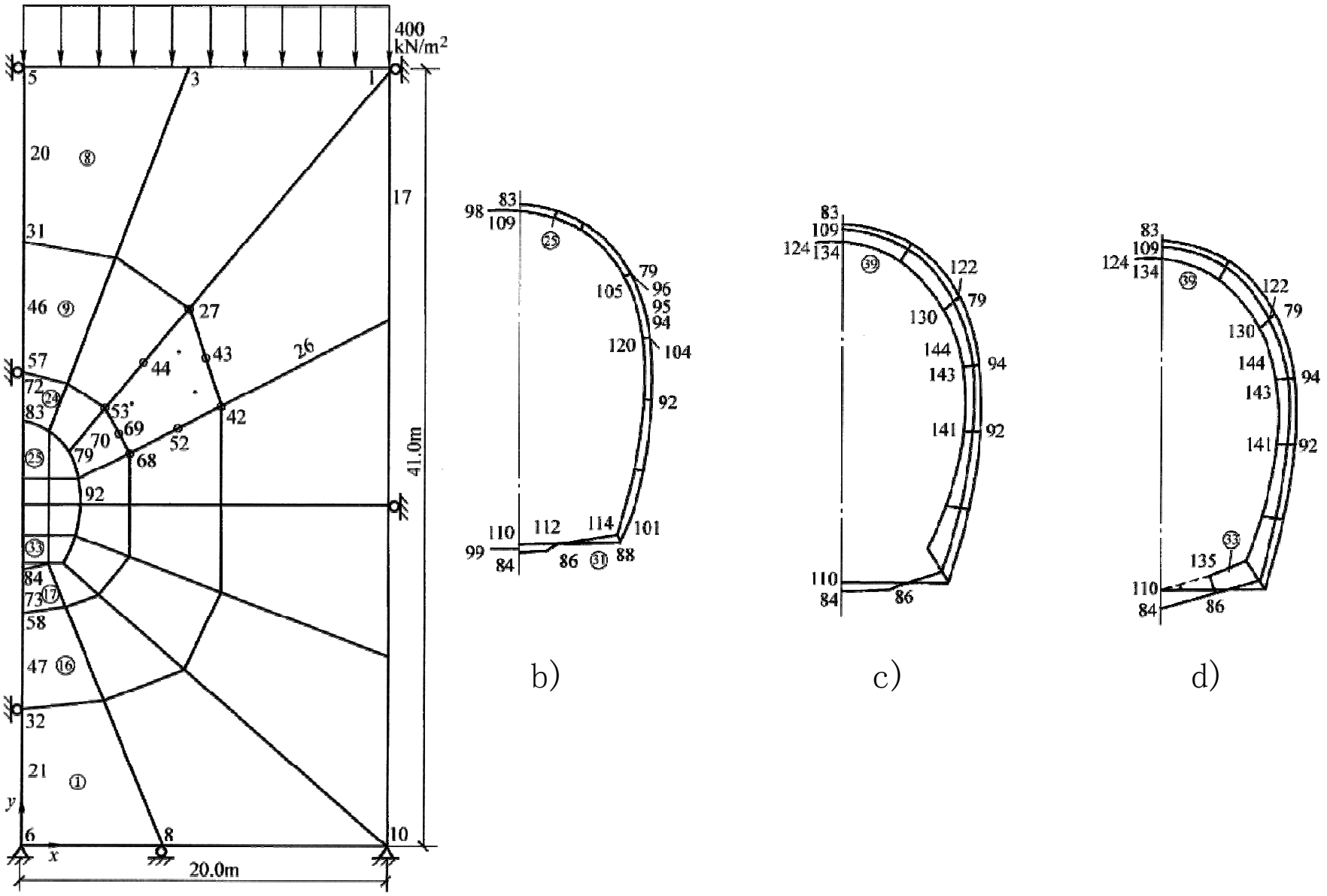


图7-6　隧道有限元离散化体系

内的有限元网格，分别对应于第一、第二和第三施工阶段。在这三个施工阶段中不再施加换算均布荷载。

采用摩尔—库仑屈服准则和关联流动法则，利用有限元法电算程序进行计算。材料计算参数列入表5-1。

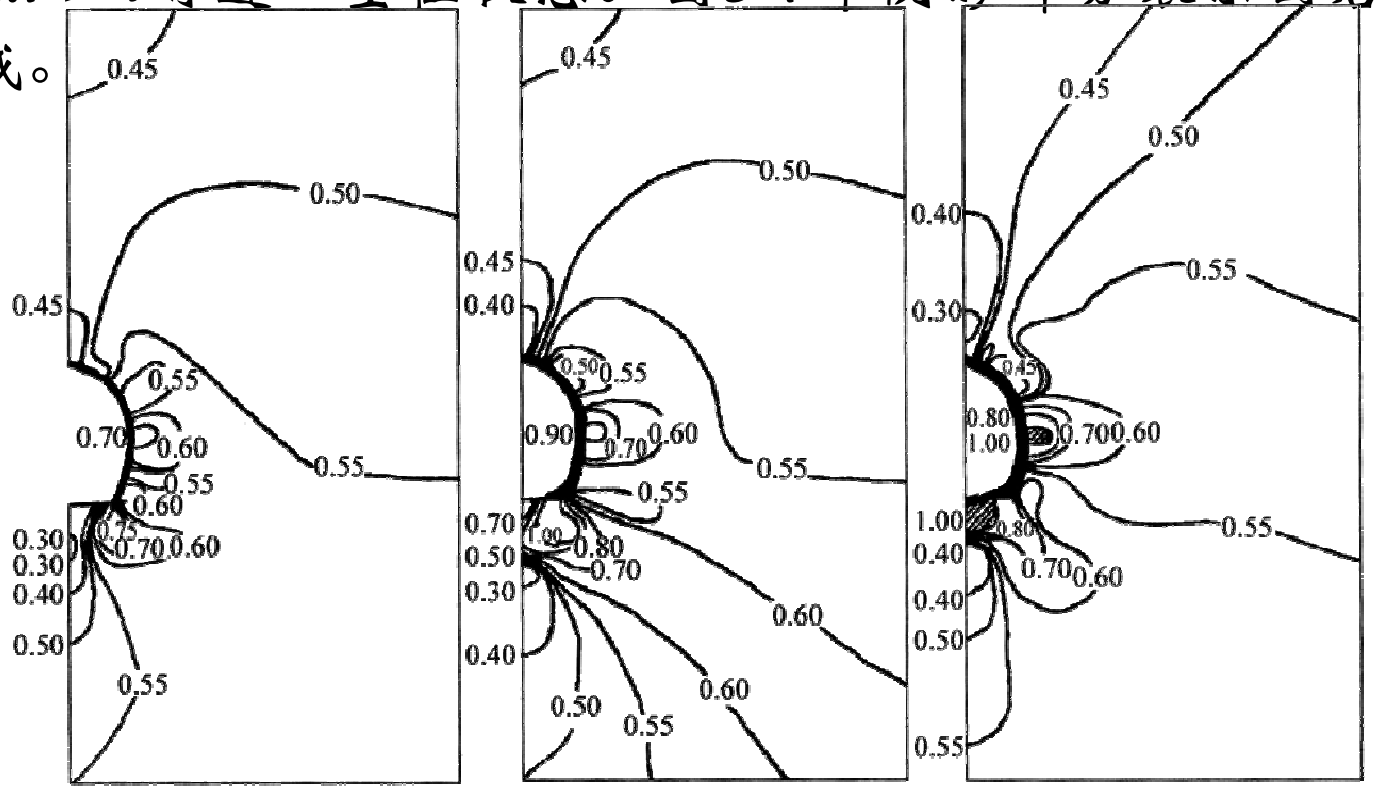
表5-1　材料参数

材料类别 名称	围　　岩	混凝土	喷混凝土
弹性模量 E /MPa	200.0	20000.0	18000.0
泊松比μ	0.333	0.2	0.2
重度γ /(kN/m^3)	20.0	23.0	22.0
粘聚力 c /MPa	0.085	3.0	3.0
内摩擦角φ /(°)	30	60	60

图5-7为第一、二、三阶段围岩强度发挥程度(S.M.F)的等值线图，材料的强度发挥程度系数S.M.F的计算公式为：

$$S.M.F=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2c\cos\varphi+\left|\sigma_1+\sigma_3\right|\sin\varphi}\quad ,$$

当S.M.F≥1时进入塑性状态。图5-7中阴影部分表示围岩的塑性区域。



a) b) c)

图5-7 各阶段围岩强度发挥程度等值线

图5-8表示各阶段开挖轮廓线的位移曲线。由图可见，在各阶段中拱顶沉陷分别为：-3.35mm、-5.27mm和-13.2mm；边墙中点水平位移分别为：-1.19mm、-2.34mm和-2.97mm（朝向隧道内）；隧道底面位移分别为：+6.38mm、+23.0mm和+12.3mm（底鼓）。

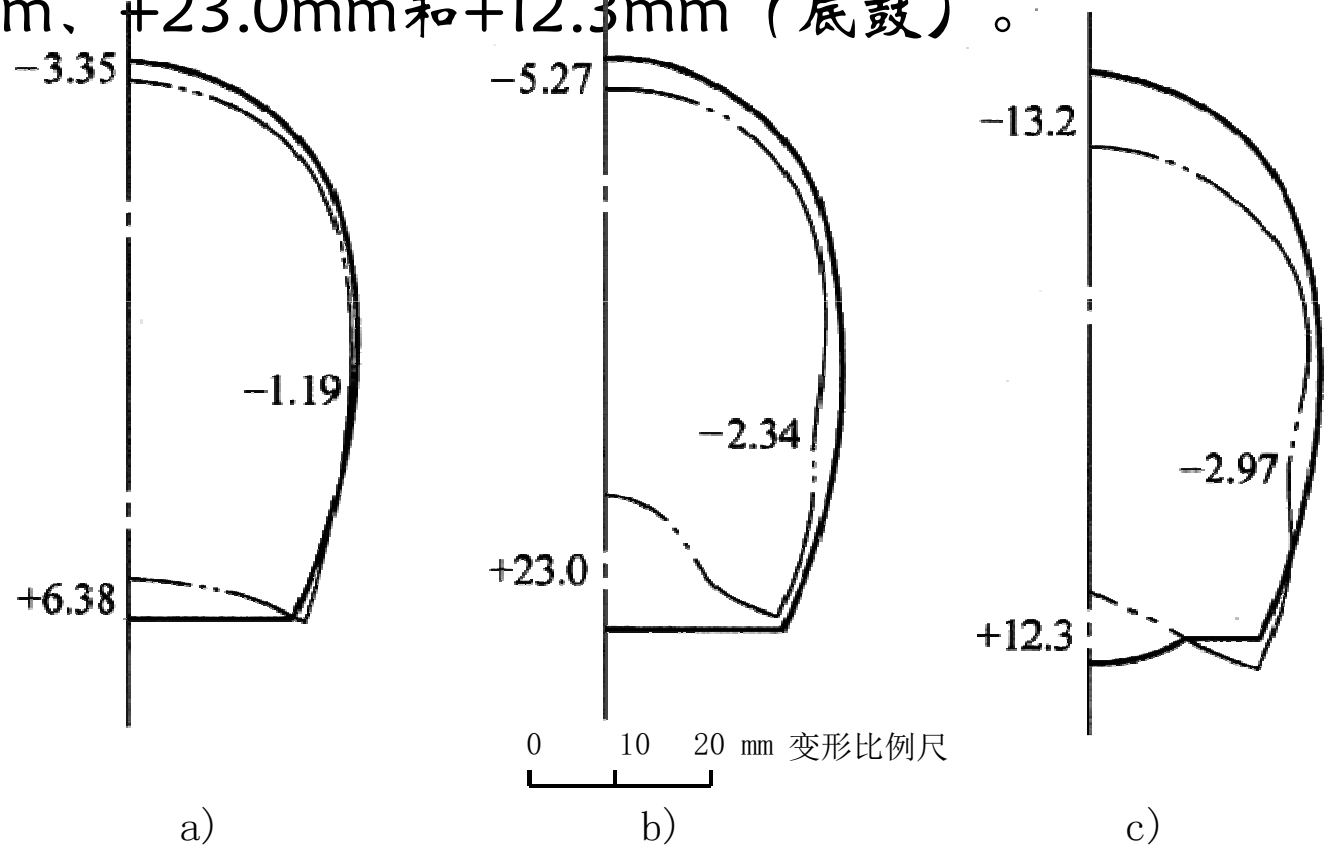


图5-8 各施工阶段边界位移图

各阶段衬砌各部位的最大、最小主应力值列入表7-2中。由该表可以看出各阶段衬砌各部位的受力情况和最薄弱的环节。

表7-2　各施工阶段衬砌最大、最小主应力　　（单位：Mpa）

阶段 / 衬砌类型		第一阶段		第二阶段		第三阶段	
		σ_{max}	σ_{min}	σ_{max}	σ_{min}	σ_{max}	σ_{min}
初　衬	拱部	+0.59	-8.17	+0.77	-13.82	+0.83	-13.68
	边墙	+1.12	-8.71	+0.27	-18.15	+0.47	-19.78
二　衬	拱部	—	—	+0.34	-10.15	+0.42	-11.40
	边墙	—	—	+0.13	-10.63	+1.02	-12.29
	仰拱	—	—	—	—	+1.66	-1.09

根据各个施工阶段衬砌的变形和应力值，以及围岩强度发挥程度等值线图，可推断该隧道衬砌及围岩整体上是基本稳定的。分析中指出了各施工阶段围岩和衬砌受力较大的部

位，可供设计和施工参考。仰拱是衬砌受力的薄弱环节，宜采用各种措施予以加固。

本例结果能较好地反映衬砌和围岩的实际受力变形情况及新奥法施工的特点和优越性：由于采用喷混凝土初期支护，使得二衬的受力条件大为改善。

3、锚杆与围岩相互作用的弹塑性有限元分析

图7-9为某工程隧道ZK46+701.5断面锚杆支护型式，采用弹塑性有限元法分析锚杆与围岩相互作用。计算模型宽88m，以隧道轴线左右对称；上取隧道整个埋深，即20m，隧道底板以下取34m。采用摩尔—库仑屈服准则，

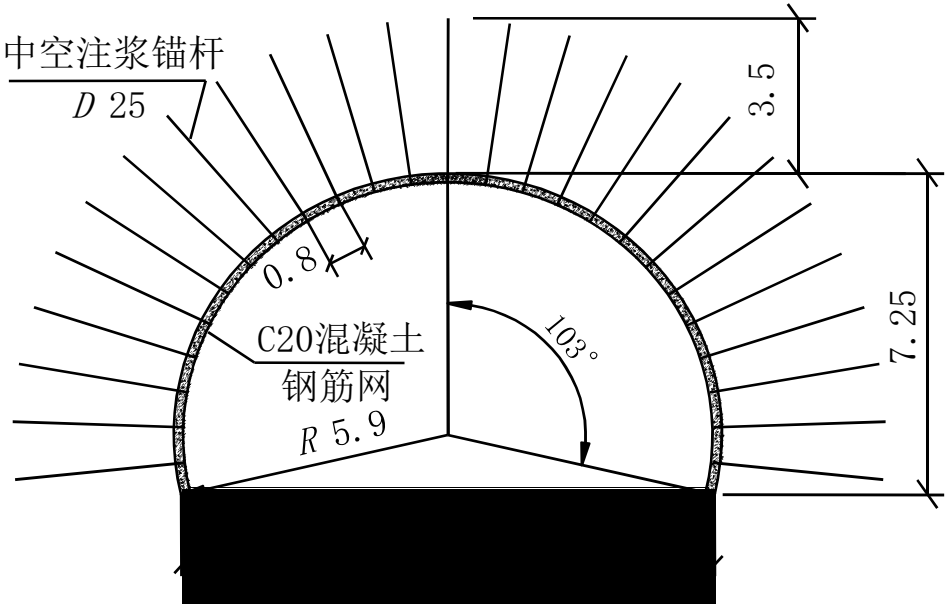


图7-9 隧道ZK46+701.5断面锚杆支护布置

材料计算参数列入表7-3、表7-4、表7-5。

表7-3　隧道ZK46+701.5断面围岩参数

参数名称	重度 γ/kN/m^3	弹性抗力系数 K/(MPa/m)	弹性模量 E/(GPa)	粘聚力 c/MPa	泊松比 μ	内摩擦角 (°)
参数值	17.5	200	1.2	0.2	0.35	27

表7-4　隧道ZK46+701.5断面D25中空注浆锚杆参数

参数名称	公称直径 (mm)	壁厚 (mm)	杆体标准长度(m)	抗拉强度 (MPa)	屈服强度 (MPa)	拉伸率δ
参数值	25	4	3.5	835	540	≥10

表7-5　隧道ZK46+701.5断面初次衬砌参数

参数名称	喷射混凝土弹性模量（GPa）	单位长度混凝土面积(m2)	钢筋焊接网	水泥浆粘结强度(MPa)	水泥浆粘结刚度(GPa)
参数值	25.5	5.34	Ø5.0×10×10	1.570	0.785

图7-10和图7-11分别为围岩的x向位移等值线图和y向位移等值线图。由图看出，隧道因开挖而发生位移的空间效应：x向位移由轴线向两边逐渐减小，且较大位移发生在距隧道拱腰较近的一定高度的范围内；-y向最大位移发生在拱顶处，且由拱顶向两边逐渐减小，隧道底部发生y向的较大位移，这是因为隧道内部岩土体挖除后，因作用在隧道底部的应力释放所产生的反拱现象，说明计算结果比较符合实际。

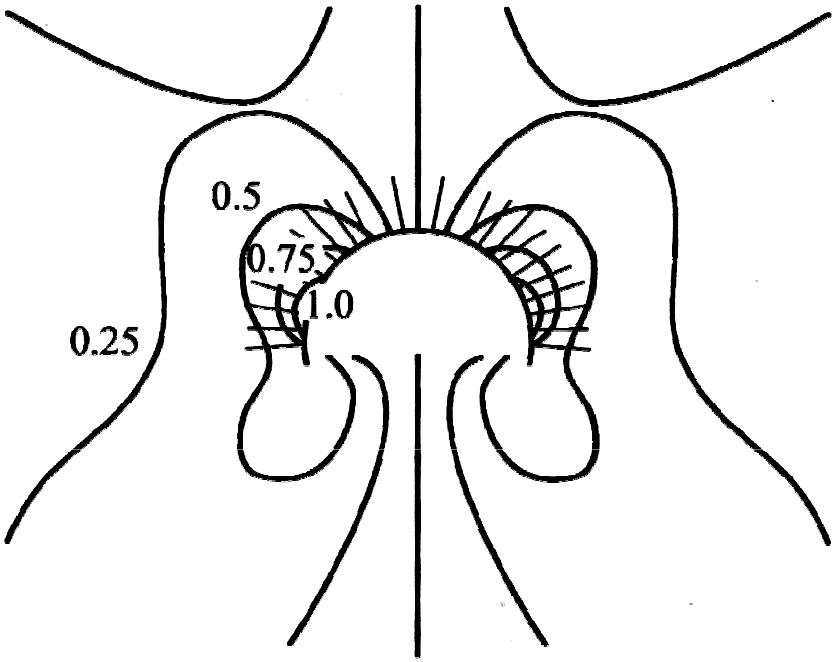


图7-10 x向位移等值线图

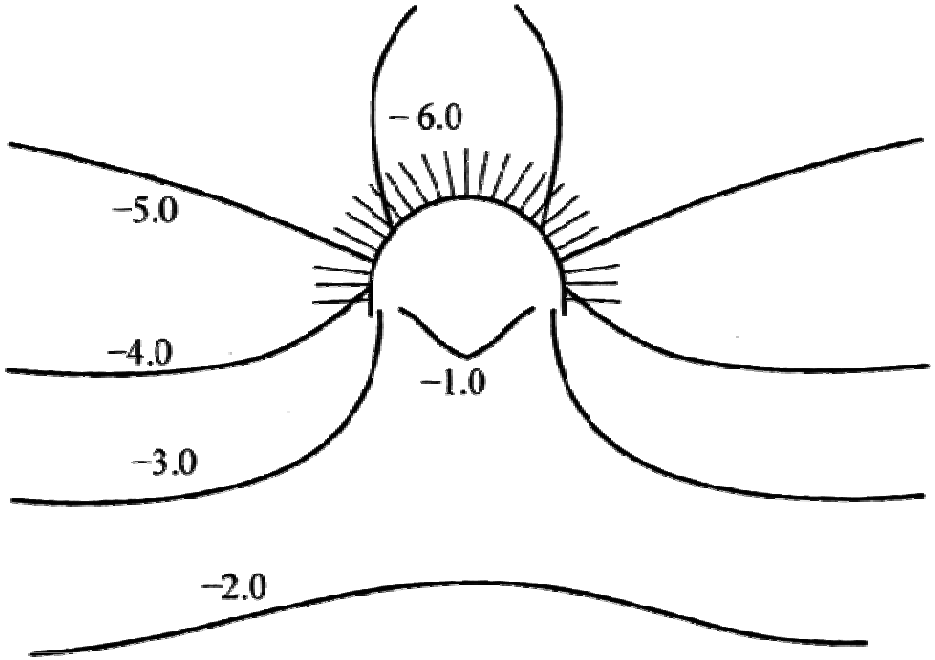
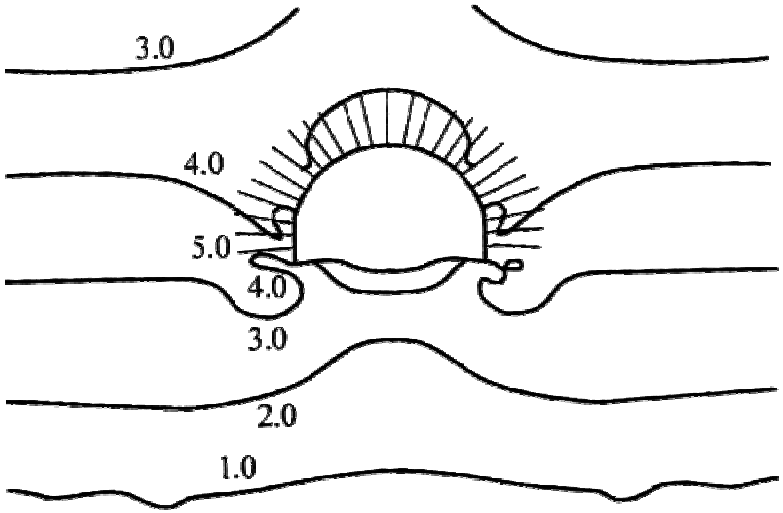


图7-11 y向位移等值线图

图7-12和图7-13分别为围岩的x向应力等值线图和y向应力等值线图，由此可以看出，x向较大应力发生在拱脚的一定范围内，即x向应力主要集中在拱脚到拱腰的一定范围内，其主要作用就是迫使拱墙向内空发生位移，直至应力释放到足以使支护应力与之抗衡，隧道内空收敛才结束；-y向较大



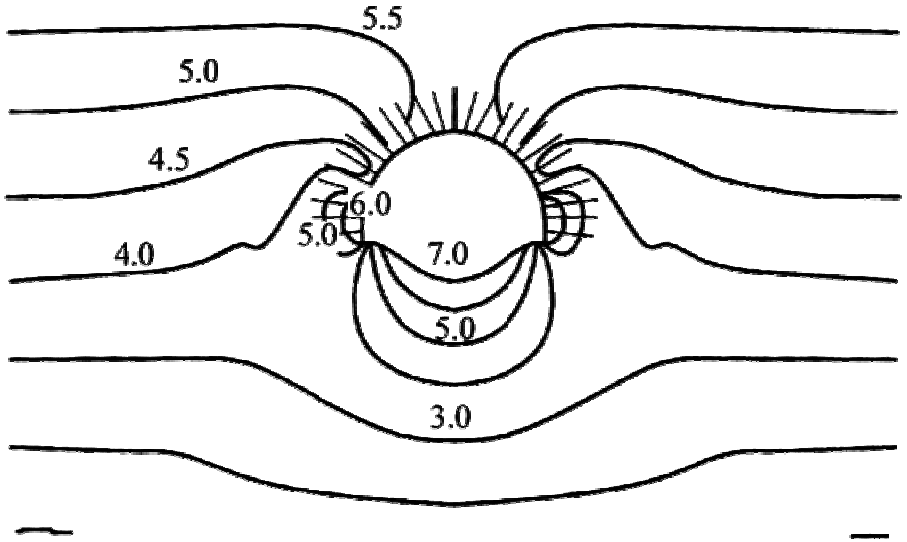


图7-12 x向应力等值线图(单位：×50kPa)

图7-13 y向应力等值线图(单位：×50kPa)

应力发生在拱顶部，发生在拱顶的集中应力主要作用就是迫使拱顶发生-y向位移，y向较大应力发生在隧道底部，发生在隧道底部的集中应力主要作用就是使隧道底部发生y向位移（反拱），这两个位移矢量和就是隧道的相对沉降量。

本算例计算得到：拱顶测点的绝对位移量为-6.834mm，路面绝对位移量为-1.225mm，则拱顶的相对下沉量为5.609mm。由实测数据回归分析得到的拱顶测点的最终沉降量为5.723mm，结果与实测值相比的相对误差为1.99%，说明结果与实际基本相符。

本算例计算得到：周边收敛的左测点的绝对位移量为1.105mm，右测点的绝对位移量为-1.102mm，则周边收敛测点的相对收敛值为2.207mm。由实测数据回归分析得到的周边收敛测点的最终收敛值为2.163mm。结果与实测值相比的相对误差为2.05%，说明结果与实际基本相符。

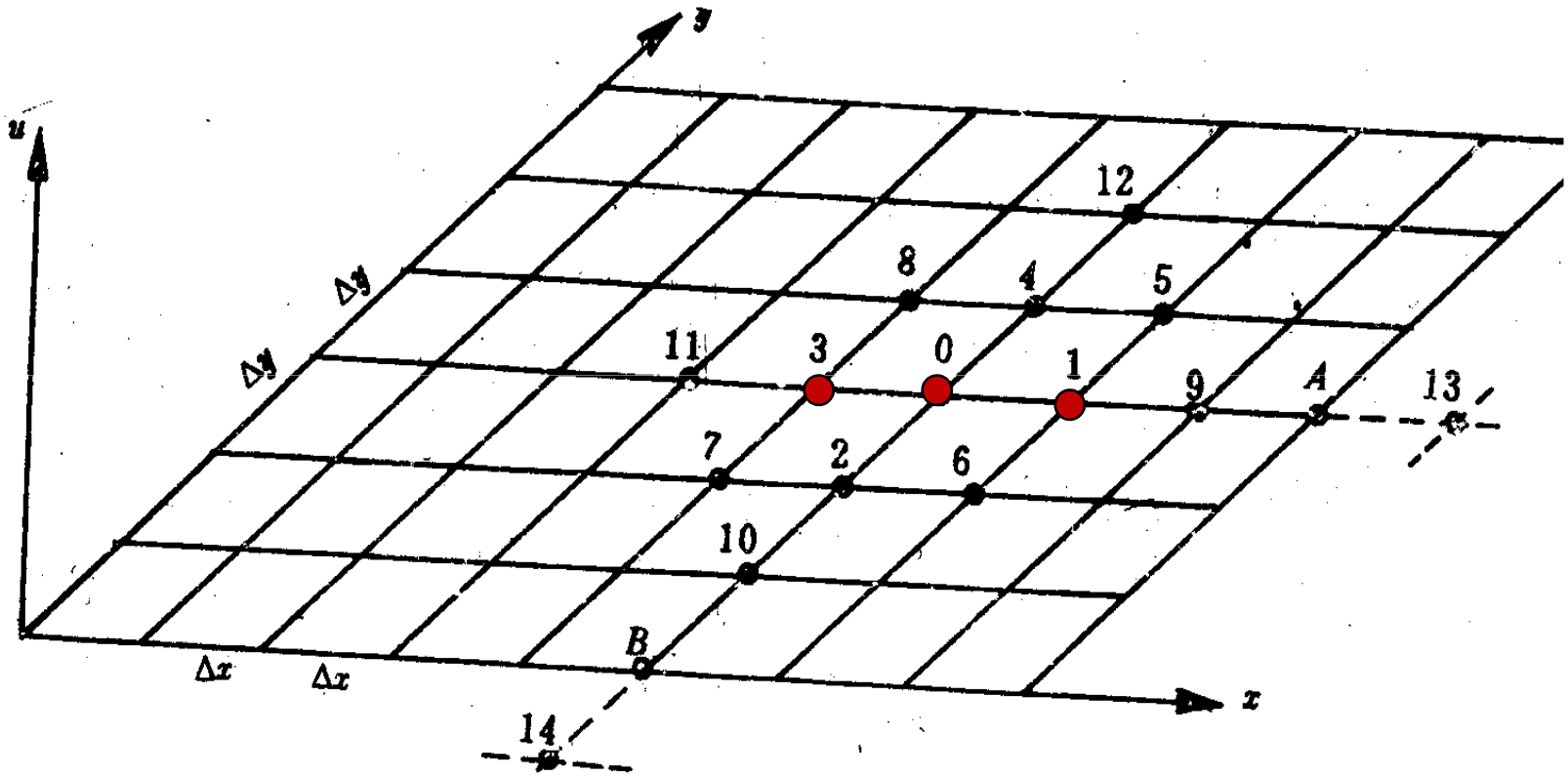
本算例表明，锚杆作为受力构件，提高了围岩的抗剪强度，即临近开挖周边的围岩其强度因爆破开挖所引起的降低则由于安设了锚杆而得到补偿。

5.2 有限差分法

◆ 概述

✦ 有限差分方法是将所有研究区域内的基本控制微分物理方程与边界条件近似差分方程表示，而将求解微分方程的问题变成在研究区域内特殊点上求解代数方程的问题

✦ 5.2.1 有限差分网格的划分

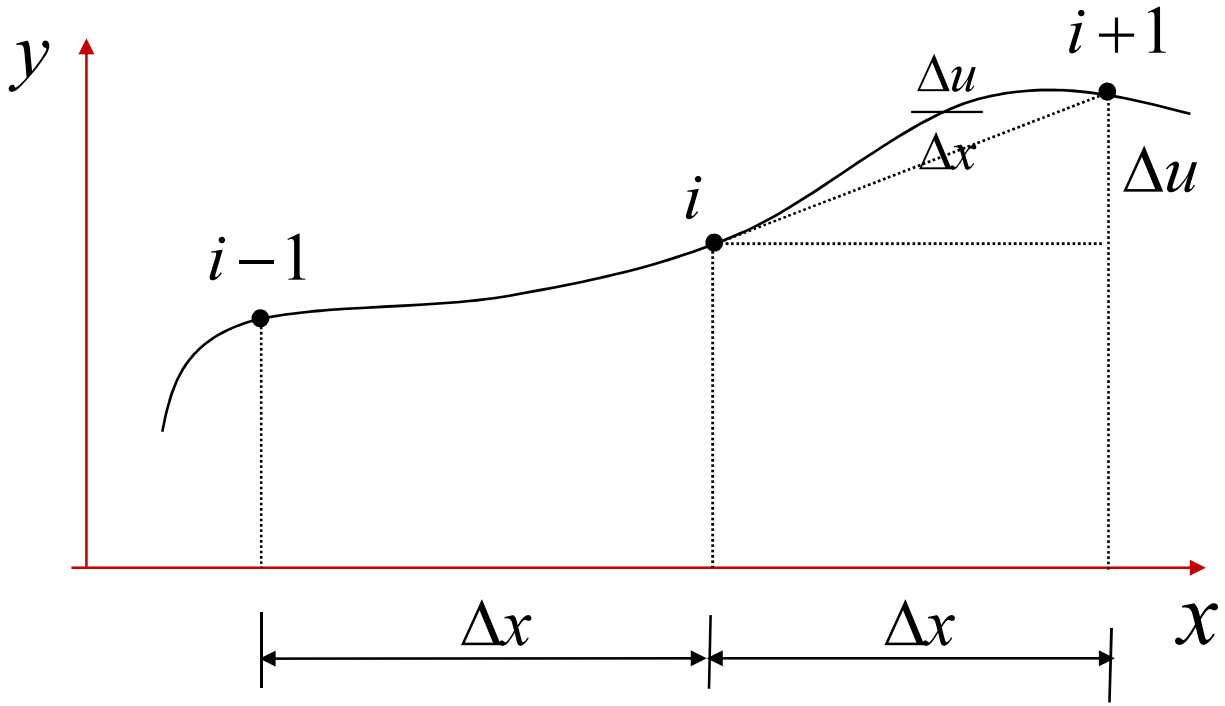


P97

◆ 5.2.2 差分公式

✦ 有限差分离散化基础：以增量之比代替连续导数

$$\frac{du}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\approx\frac{\Delta u}{\Delta x}$$



✦ 连续函数 $u(x,y)$ 的泰勒展开

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^3 + \cdots$$

以0点为x，y坐标原点：

$$u_3 = u_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^3 + \cdots$$

$$u_1 = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^3 + \cdots$$

P97

P98差分公式求一阶与二阶导数

略去高阶微量：

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \dfrac{u_1 - u_3}{2\Delta x} \\ \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 = \dfrac{u_1 + u_3 - 2u_0}{\Delta x^2} \end{cases}$$

同理：

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \dfrac{u_2 - u_4}{2\Delta y} \\ \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = \dfrac{u_2 + u_4 - 2u_0}{\Delta y^2} \end{cases}$$

有时采用前差、后差、中心差分格式

差分公式(一阶二阶)：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \frac{u_1 - u_3}{2\Delta x} \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \frac{u_2 - u_4}{2\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{u_1 + u_3 - 2u_0}{\Delta x^2} \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{u_2 + u_4 - 2u_0}{\Delta y^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_0 = \frac{1}{4\Delta x \Delta y}\left[\left(u_6 + u_8\right) - \left(u_5 + u_7\right)\right]$$

差分公式(三阶四阶):

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^3}\right)_0 = \frac{1}{2\Delta x}(-2u_1 + 2u_3 - u_9 - u_{11})$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_0 = \frac{1}{\Delta x^4}\left(-4u_1 + 6u_0 - 4u_3 + u_9 + u_{11}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2}\left[4u_0 - 2u_1 - 2u_2 - 2u_3 - 2u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^3}\right)_0 = \frac{1}{2\Delta y}(-2u_2 + 2u_4 - u_{10} - u_{12})$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_0 = \frac{1}{\Delta y^4}\left(6u_0 - 4u_2 - 4u_4 + u_{10} + u_{12}\right)$$

✦ 应力函数的差分解

设φ为应力函数，则：

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial xy} \end{cases}$$

利用差分公式：

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_x)_0 = \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 = \dfrac{1}{\Delta y^2}\left[(\varphi_2 + \varphi_4) - 2\varphi_0\right] \\ (\sigma_y)_0 = \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \dfrac{1}{\Delta x^2}\left[(\varphi_1 + \varphi_3) - 2\varphi_0\right] \\ (\tau_{xy})_0 = \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial xy}\right)_0 = \dfrac{1}{4\Delta y^2 \Delta x^2}\left[(\varphi_5 + \varphi_7) - (\varphi_6 + \varphi_8)\right] \end{cases}$$

5.2.3 与有限单元法的比较

相同之处：分析区域假设为连续体，将其离散为有限个差分网格

差异之处：有限单元法采用隐式迭代求解

有限差分采用差商或有限差分公式来近似导数和微分

优势：1）无需大型矩阵；2）可以分析静态与动态问题

3）可为准静态问题求解全动态方程，可以解决结构倒塌问题

劣势：需要计算时间较多；材料刚度或者尺寸有较大差异时，计算十分缓慢

5.3 离散单元法

◆ 概述

✦ 离散单元法是20世纪70年代初兴起的一种数值计算方法，适合节理岩体的应力分析

✦ 离散元法也将模型划分成刚性单元，单元之间可以相互叠合，也可以相互分离

✦ 单元之间相互作用的力可以根据力和位移的关系求出，而个别单元的运动则完全根据该单元所受的不平衡力与不平衡力矩的大小按牛顿运动定律确定

✦ 单元之间不需满足变形协调方程

Cundall (1971) Cundall & Strack (1979)

P99 一起看书

Shi (1988) 石根华

5.3.2 基本原理

1 基本假定

2 计算循环

5.3.3 颗粒类型及接触模型

1 颗粒类型 （圆形 椭圆形 微小圆盘或团聚体）

2 接触模型 （法向 切向 转动）

3 接触本构模型 线性弹性 非线性弹性

5.3.4 边界条件

1 刚性边界

2 周期性边界

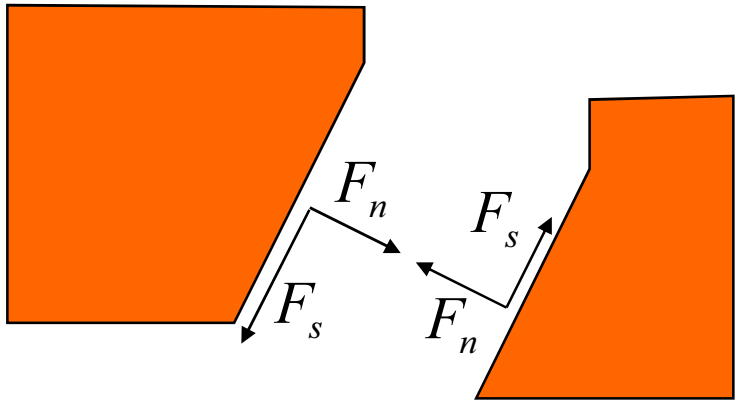
3 应力边界

5.3.5 与连续介质理论的比较 （优势与劣势 P108）

◆ 离散单元法的基本方程

✦ 物理方程-力和位移的关系

$$\begin{cases} \Delta F_n = K_n \Delta U_n \\ \Delta F_s = K_s \Delta U_s \end{cases}$$



K_n – 法向刚度系数

K_s – 切向刚度系数

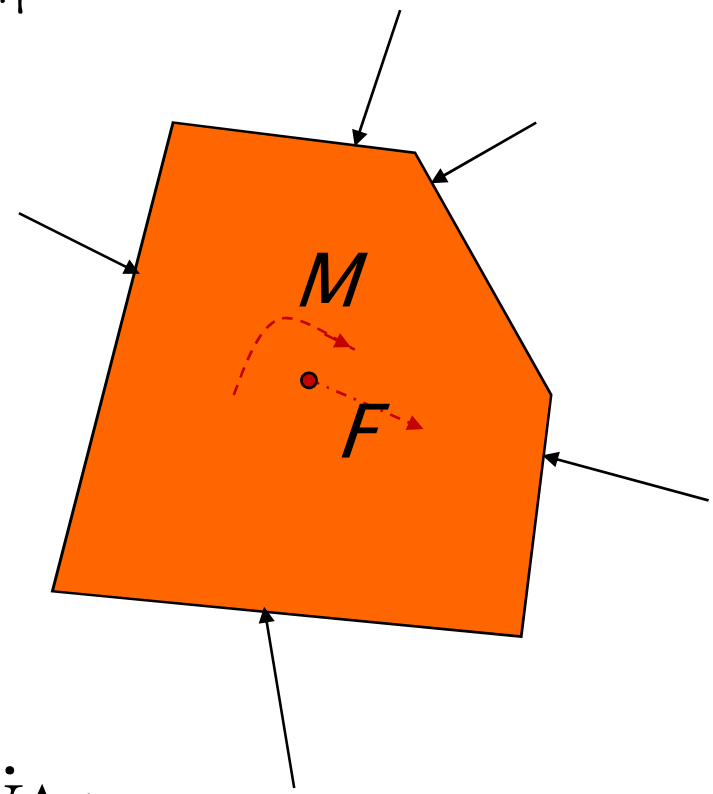
✦运动方程-牛顿第二运动定律

合力： $F = \sum F_i$

合力矩： $M = \sum e_{ij} x_j F_i$

加速度： $\ddot{u} = F / m$

角加速度： $\ddot{\theta} = M / I$

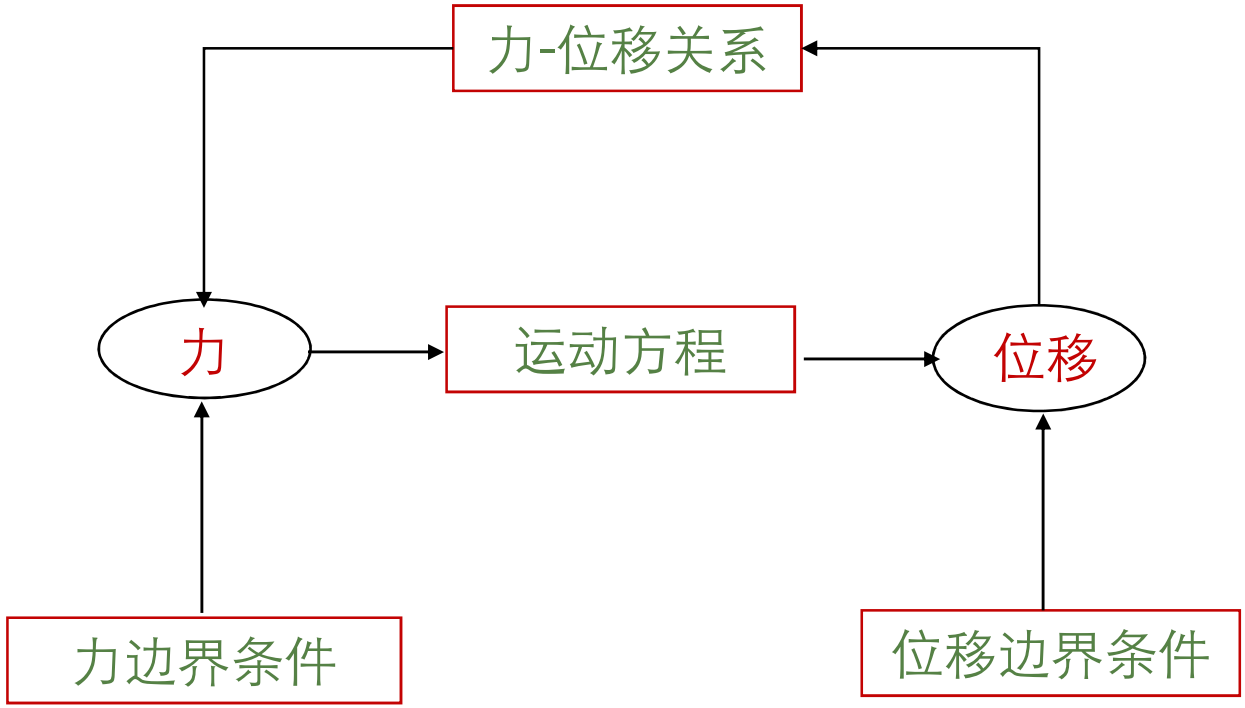


加速度、速度、位移关系：

$$\begin{cases} \dot{U}(t_1) = \dot{U}(t_0) + \ddot{U}\Delta t \\ U(t_1) = U(t_0) + \dot{U}\Delta t \end{cases}$$

◆ 离散单元法的计算机实现

✦ 力和位移的计算循环



✦已知力求位移

考虑阻尼的运动方程:

$$\begin{cases} m\ddot{u}_x + \alpha m\dot{u}_x = F_x \\ m\ddot{u}_y + \alpha m\dot{u}_y = F_y \\ I\ddot{\theta} + \alpha I\dot{\theta} = M \end{cases}$$

α – 块体的质量阻尼比例系数

对运动方程进行一阶中心差分:

$$\begin{cases} m\dfrac{\dot{u}_x(t+\Delta t/2)-\dot{u}_x(t-\Delta t/2)}{\Delta t} + \alpha m\dfrac{\dot{u}_x(t+\Delta t/2)+\dot{u}_x(t-\Delta t/2)}{2} = F_x \\ m\dfrac{\dot{u}_y(t+\Delta t/2)-\dot{u}_y(t-\Delta t/2)}{\Delta t} + \alpha m\dfrac{\dot{u}_y(t+\Delta t/2)+\dot{u}_y(t-\Delta t/2)}{2} = F_y \\ I\dfrac{\dot{\theta}(t+\Delta t/2)-\dot{\theta}(t-\Delta t/2)}{\Delta t} + \alpha I\dfrac{\dot{\theta}(t+\Delta t/2)+\dot{\theta}(t-\Delta t/2)}{2} = M \end{cases}$$

由上式可求得$t+\Delta t/2$ 时刻的速度与角速度：

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{u}_x(t+\Delta t/2)=\left[\ddot{u}_x(t-\Delta t/2)(1-\alpha\Delta t/2)+\dfrac{F_x}{m}\Delta t\right]/(1+\alpha\Delta t/2)\\ \dot{u}_y(t+\Delta t/2)=\left[\ddot{u}_y(t-\Delta t/2)(1-\alpha\Delta t/2)+\dfrac{F_y}{m}\Delta t\right]/(1+\alpha\Delta t/2)\\ \dot{\theta}(t+\Delta t/2)=\left[\dot{\theta}(t-\Delta t/2)(1-\alpha\Delta t/2)+\dfrac{M}{I}\Delta t\right]/(1+\alpha\Delta t/2)\end{cases}$$

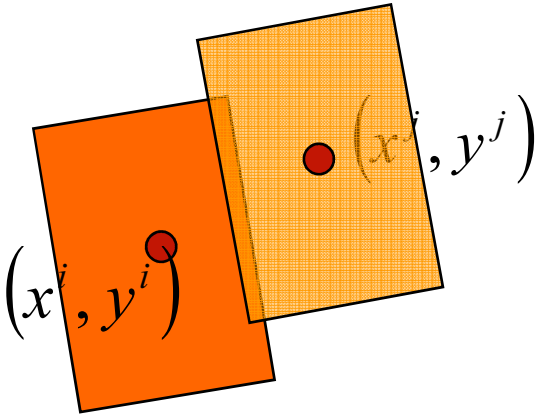
则从 t 到 $t+\Delta t/2$ 时刻的线位移与角位移增量为：

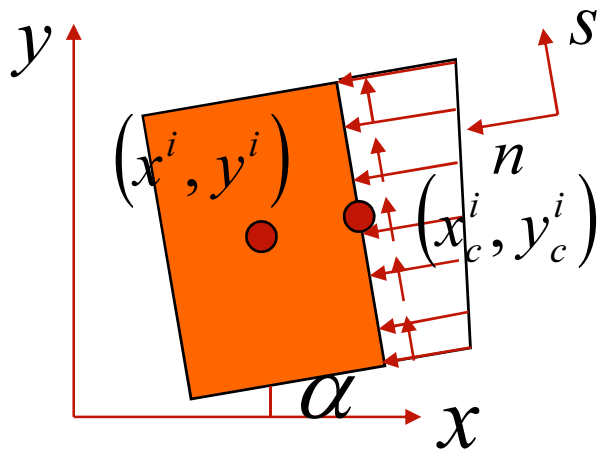
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u_x = \dot{u}_x(t+\Delta t/2)\bullet\Delta t \\ \Delta u_y = \dot{u}_y(t+\Delta t/2)\bullet\Delta t \\ \Delta\theta = \dot{\theta}(t+\Delta t/2)\bullet\Delta t \end{cases}$$

则 $t+\Delta t/2$ 时刻的线位移与角位移为：

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x(t+\Delta t) = u_x(t)+\Delta u_x \\ u_y(t+\Delta t) = u_y(t)+\Delta u_y \\ \theta(t+\Delta t) = \theta(t)+\Delta\theta \end{cases}$$

✦ 已知位移求力





$$\begin{cases} \Delta u_x^c = \Delta u_x^i - \Delta u_x^j + \Delta\theta^i (x_c^i - x^i) - \Delta\theta^j (x_c^j - x^j) \\ \Delta u_y^c = \Delta u_y^i - \Delta u_y^j + \Delta\theta^i (y_c^i - y^i) - \Delta\theta^j (y_c^j - y^j) \end{cases}$$

进行坐标变换得接触点处法向与切向位移增量：

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u_s^c = \Delta u_x^c \cos\alpha + \Delta u_y^c \sin\alpha \\ \Delta u_n^c = -\Delta u_x^c \sin\alpha + \Delta u_y^c \cos\alpha \end{cases}$$

则接触点上的作用力为：

$$\Rightarrow \begin{cases} F_n^c = F_n^{c0} - K_n \Delta u_n^c & \text{法向力} \\ F_s^c = F_s^{c0} + K_s \Delta u_s^c & \text{切向力} \\ D_n^c = -K_n \Delta u_n^c & \text{法向阻尼力} \\ D_s^c = K_s \Delta u_s^c & \text{切向阻尼力} \end{cases}$$

将接触点上的作用力转化到形心上：

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x^{ci} = -(F_s^c + D_s^c)\cos\alpha - (F_n^c + D_n^c)\sin\alpha \\ F_y^{ci} = -(F_s^c + D_s^c)\sin\alpha + (F_n^c + D_n^c)\cos\alpha \\ M_i^c = F_y^{ci}(x_i^c - x_i) - F_x^{ci}(y_i^c - y_i) \end{cases}$$

所有接触点上的作用力转化到形心上：

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{xsum}^{i} = \sum_{1}^{m} F_{x}^{ci} \\ F_{ysum}^{i} = \sum_{1}^{m} F_{y}^{ci} \\ M_{sum}^{i} = \sum_{1}^{m} M_{i}^{c} \end{cases}$$

P108 PFC2D二维颗粒流计算程序 美国Itasca公司

5.3.6 隧道开挖模拟实例

Refs

1 朱合华编 地下建筑结构 中国建筑工业出版社 第三版

2第七章 隧道工程设计中的有限元方法 网络资源

The end

文件名格式：班级 学号 姓名 简略实验名称

邮件标题同文件名

Any questions please 发送至

xingzhengwu@163.com