3 弹性地基梁理论

采用“地基地震隔绝”技术，在高层建筑物底部安装橡胶弹性垫

本讲内容

3.1 概述

3.2 弹性地基梁的计算模型

3.3 弹性地基梁的挠度曲线微分方程及其初参数解

3.4 弹性地基梁短梁、长梁及刚性梁

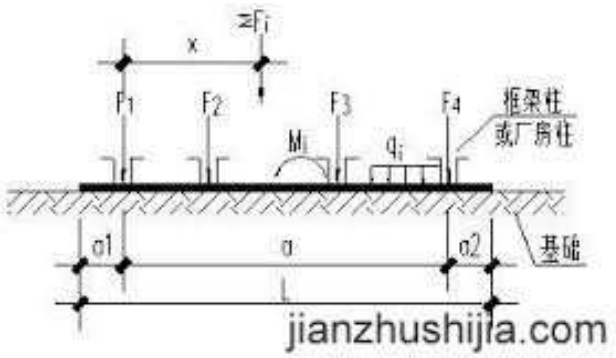
3.5 算例

3.1 概述

横向荷载作用下桩身内力与位移的计算将桩作为弹性地基上的梁 按文克尔假定（梁身任一点的土抗力和该点的位移成正比）进行求解　基础工程也要讲

定义：

弹性地基梁，是指搁置在具有一定弹性地基上，各点与地基紧密相贴的梁。如铁路枕木、钢筋混凝土条形基础梁，等等。



柱下条形基础

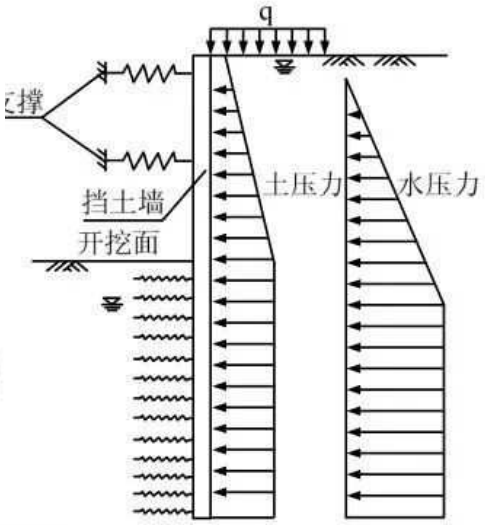
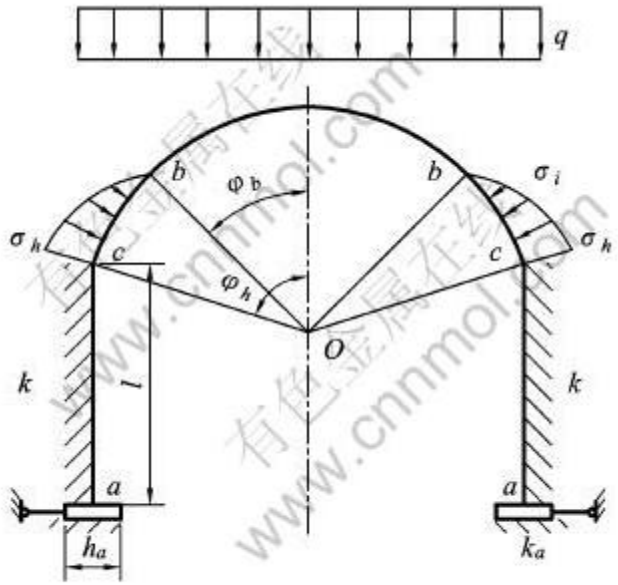


图 6-5 平面弹性地基梁法计算简图

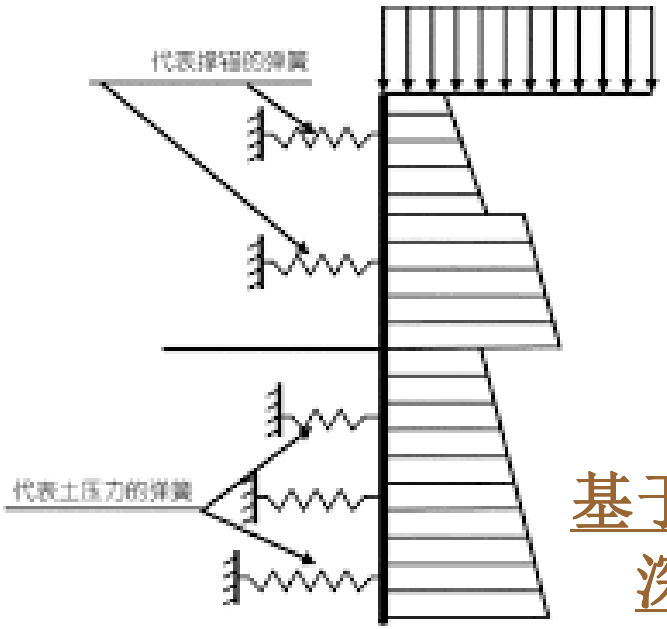
挡土墙弹性地基梁法简图

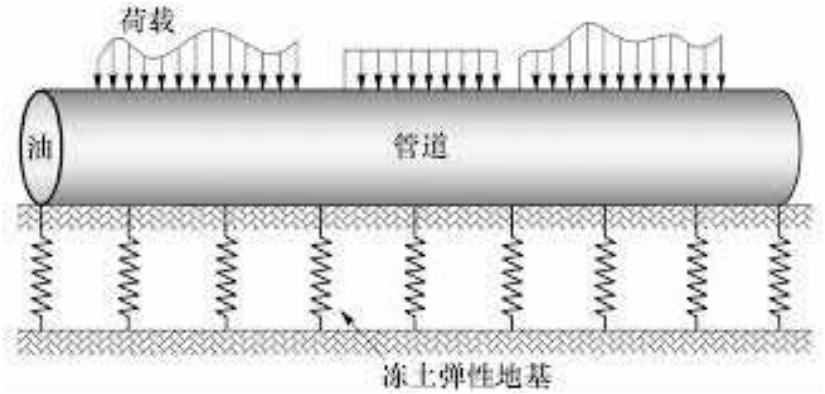


直墙式衬砌弹性地基梁法

通过这种梁，将作用在它上面的荷载，分布到较大面积的地基上，既使承载能力较低的地基，能承受较大的荷载，又能使梁的变形减小，提高刚度降低内力。

地下建筑结构的计算，与弹性地基梁理论有密切关系。地下建筑结构弹性地基梁可以是平放的，也可以是竖放的，地基介质可以是岩石、粘土等固体材料，也可以是水、油之类的液体介质。弹性地基梁是超静定梁，其计算有专门的一套计算理论。





基于弹性地基梁法的深基坑软土抗剪

弹性地基梁与普通梁的区别：

1. 超静定次数是无限还是有限，这是它们的一个主要区别。

普通梁支座有限，支座反力也是有限个未知力，为静定　　行动自如

弹性地基梁则为无穷（支点与未知反力），为无穷多次超静定　　行动受限

2. 地基的变形是考虑还是略去，这是它们的另一个主要区别。

普通梁为刚性支座，略去地基的变形，只考虑梁的变形

弹性地基梁则认为梁与地基是共同变形的，且

满足变形连续条件

变形连续条件＝变形协调条件 compatibility condition

要动一起动

3.2 弹性地基梁的计算模型

由于地基梁搁置在地基上，梁上作用有荷载，地基梁在荷载作用下与地基一起产生沉陷，因而梁底与地基表面存在相互作用反力 σ，σ 的大小与地基沉降y有密切关系，很显然，沉降越大，反力 σ 也越大，因此在弹性地基梁的计算理论中关键问题是如何确定地基反力与地基沉降之间的关系，或者说如何选取弹性地基的计算模型问题。

计算模型分类：

1. 局部弹性地基模型
2. 半无限体弹性地基模型

3.2.1 局部弹性地基模型

1867年前后，温克尔（E.Winkler）对地基提出如下假设：

地基表面任一点的沉降与该点单位面积上所受的压力成正比。即

$$y = \frac{p}{k} \tag{3.1}$$

式中,y为地基的沉陷，m；k为弹性抗力系数，kp_a / m，其物理意义为：

使地基产生单位沉陷所需的压强；p为单位面积上的压力强度，kp_a。

小号乐器

这个假设实际上是把地基模拟为刚性支座上一系列独立的弹簧。当地基表面上某一点受压力p时，由于弹簧是彼此独立的，故只在该点局部产生沉陷y，而在其它地方不产生任何沉陷。因此，这种地基模型称作局部弹性地基模型。

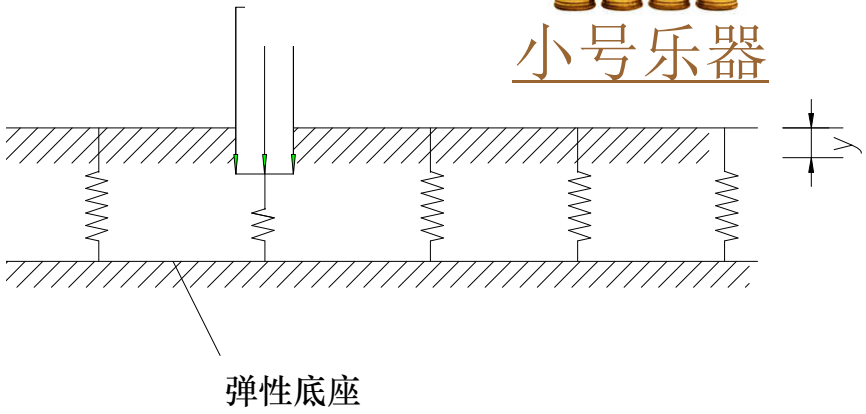


图3.1 局部弹性地基模型

✓优点：

按温克尔假设计算地基梁时，可以考虑梁本身的实际弹性变形，因此消除了反力直线分布假设中的缺点。

✓缺点：

温克尔假设本身的缺点是没有反映地基的变形连续性，当地基表面在某一点承受压力时，实际上不仅在该点局部产生沉陷，而且也在邻近区域产生沉陷。由于没有考虑地基的连续性，故温克尔假设不能全面地反映地基梁的实际情况，特别对于密实厚土层地基和整体岩石地基，将会引起较大的误差。但是，如果地基的上部为较薄的土层，下部为坚硬岩石，则地基情况与图中的弹簧模型比较相近，这时将得出比较满意的结果。

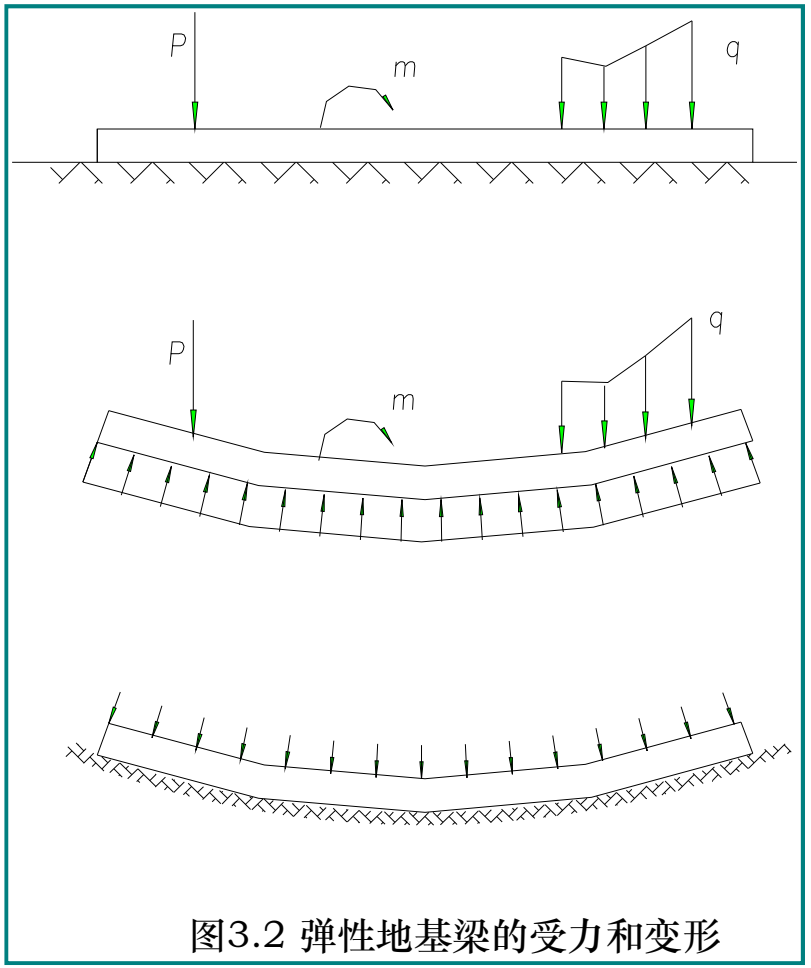


图3.2 弹性地基梁的受力和变形

3.2.2 半无限体弹性地基模型

为了消除温克尔假设中没有考虑地基连续性这个缺点，后来又提出了另一种假设：把地基看作一个均质、连续、弹性的半无限体（所谓半无限体是指占据整个空间下半部的物体，即上表面是一个平面，并向四周和向下方无限延伸的物体）。

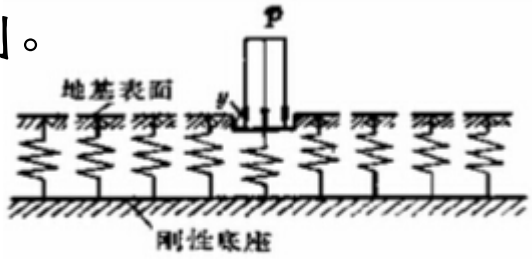
✓优点：

一方面反映了地基的连续整体性，另一方面又从几何上、物理上对地基进行了简化，固而可以把弹性力学中有关半无限弹性体这个古典问题的已知结论作为计算的基础。

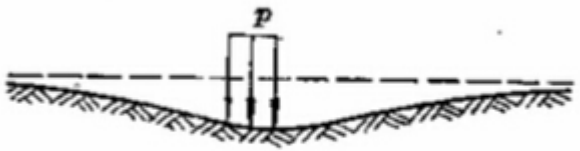
✓缺点：

当然这个模型也不是完美无缺的。例如其中的弹性假设没有反映土体的非弹性性质，均质假设没有反映土体的不均匀性，半无限体的假设没有反映地基的分层特点等。此外，这个模型在数学处理上比较复杂，因而在应用上也受到一定的限制。

本章所讨论的弹性地基梁计算理论采用局部弹性地基模型。



温克尔假定



半无限体弹性地基模型

3.3 弹性地基梁的挠度曲线微分方程式及其初参数解

3.3.1 基本假设：

在弹性地基梁的计算理论中，除上述局部弹性地基模型假设外，还需作如下三个假设：

（1）地基梁在外荷载作用下产生变形的过程中，梁底面与地基表面始终紧密相贴，即地基的沉陷或隆起与梁的挠度处处相等；

（2）由于梁与地基间的摩擦力对计算结果影响不大，可以略去不计，因而，地基反力处处与接触面相垂直；

（3）地基梁的高跨比较小，符合平截面假设，因而可直接应用材料力学中有关梁的变形及内力计算结论。

材料力学中的一个变形假设，其内容是：垂直于杆件轴线的各平截面（即杆的横截面）在杆件受拉伸、压缩或纯弯曲而变形后仍然为平面，并且同变形后的杆件轴线垂直。

3.3.2 弹性地基梁的挠度曲线微分方程式

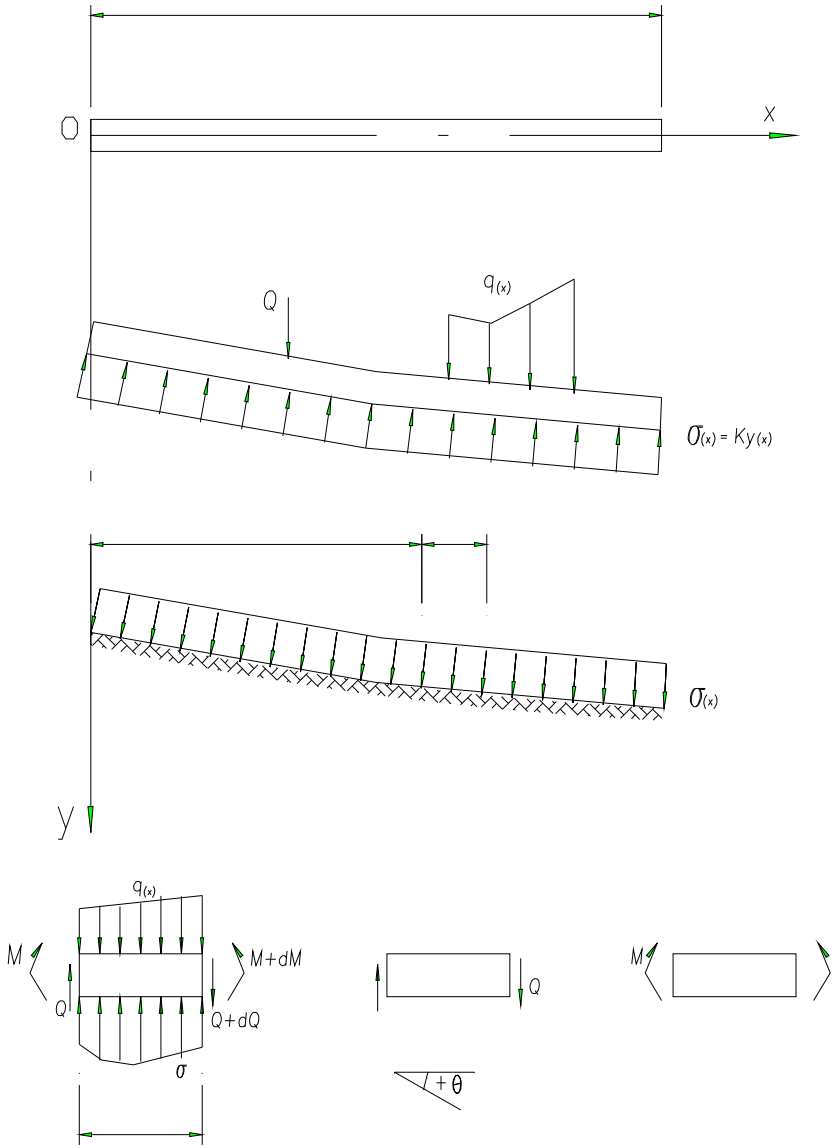


图3.3 弹性地基梁的微元分析

左图所示为局部弹性地基梁上的长为L、宽度b为单位宽度1的等截面直梁，在荷载$q_{(x)}$及Q作用下，梁和地基的沉陷为$y_{(x)}$，梁与地基之间的反力为$\sigma_{(x)}$。

在局部弹性地基梁的计算中，通常以沉陷函数$y_{(x)}$作为基本未知量，地基梁在外荷载$q_{(x)}$、Q作用下产生变形，最终处于平衡状态，选取坐标系xoy，外荷载，地基反力，梁截面内力及变形正负号规定如图所示。

为建立$y_{(x)}$应满足的挠曲微分方程，在梁中截取一微段 dx，考察该段的力与力矩的平衡有：

$\Sigma Y = 0$，　得：

$$Q-(Q+dQ)+kydx-q_{(x)}dx=0 \qquad (3.2)$$

$\sigma_{(x)}$

化简得：$\dfrac{dQ}{dx}=ky-q(x)$

一块看书上图

$\Sigma M = 0$　得：

$$M-(M+dM)+(Q+dQ)dx+q_{(x)}\frac{(dx)^2}{2}-\sigma\frac{(dx)^2}{2}=0$$

略去二阶微量得：

$$Q=\frac{dM}{dx} \qquad (3.3)$$

将上式对于x求导得：

$$\frac{dQ}{dx}=\frac{d^2M}{dx_2}=ky-q_{(x)} \qquad (3.4)$$

如果梁的挠度y已知，则梁任意截面的转角θ，弯矩M，剪力Q可按材料力学中的公式来计算，即：

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \frac{dy}{dx} \\ M &= -EI\frac{d\theta}{dx} = -EI\frac{d^2y}{dx^2} \\ Q &= \frac{dM}{dx} = -EI\frac{d^3y}{dx^3} \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

由式(3.5)有，$\frac{d^2M}{dx^2} = -EI\frac{d^4y}{dx^4}$，代入式(3.4)得

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + ky = q_{(x)} \qquad (3.6)$$

此即为弹性地基梁的挠曲微分方程式

3.3.3 对应齐次微分方程的通解

上面推导得弹性地基梁的挠曲微分方程式是一个四阶常系数线性非齐次微分方程，令式中 $q_{(x)}=o$，即得对应齐次微分方程：

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ky=0 \qquad (3.7)$$

由微分方程理论知，上述方程的通解由四个线性无关的特解组合而成。为寻找四个线性无关的特解，令 $y=e^{rx}$ 并代入上式有：

$$\gamma^4=-\frac{K}{EI} \qquad 或 \qquad \gamma^4=-\frac{K}{EI}\left(\cos\pi+i\cdot\sin\pi\right)$$

由复数开方根公式得：

$$r_k=\sqrt[4]{\frac{K}{EI}}\left(COS\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)(k=0,1,2,3) \qquad (3.8)$$

令 $\sqrt[4]{\frac{K}{EI}}=\alpha$，若地基梁宽度为b，则有 $\alpha=\sqrt[4]{\frac{Kb}{EI}}$ (3.9)

α 是与梁和地基的弹性性质相关的一个综合参数，反映了地基梁与地基的相对刚度，对地基梁的受力特性和变形有重要影响，通常把

α 称为弹性特征系数，$\alpha\ell$ 称为换算长度。

由上式（3.8），分别令时k=1,2,3时，即可得四个线性无关的特解，将其进行组合并引入四个积分常数，即得齐次微分方程式（3.7）的通解；

$$y = e^{\alpha x}\left(A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \varepsilon x\right) + e^{-\alpha x}\left(A_3 \cos \alpha x + A_4 \sin \varepsilon x\right) \qquad (3.10)$$

利用双曲函数关系：

$$e^{\alpha x} = ch\alpha x + sh\alpha x, e^{-\alpha x} = ch\alpha x - sh\alpha x$$

且令

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(B_1 + B_2\right), \quad A_2 = \frac{1}{2}\left(B_2 + B_3\right)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left(B_1 - B_2\right), \quad A_4 = \frac{1}{2}\left(B_2 - B_4\right)$$

式中B1、B2、B3、及B4均为待定积分常数

则有

$$y = B_1 ch\alpha x \cos \alpha x + B_2 ch\alpha x \sin \alpha x + B_3 sh\alpha x \cos \alpha x + B_4 sh\alpha x \sin \alpha x \qquad (3.11)$$

式（3.10）和式（3.11）均为微分方程（3.7）的通解，
在不同的问题中，有各自不同的方便之处。

3.3.4 初参数解

A 初参数法

由式（3.11），再据式（3.5）有

$$
\left.\begin{aligned}
y &= B_1 ch\alpha x\cos\alpha x + B_2 ch\alpha x\sin\alpha x + B_3 sh\alpha x\cos\alpha x + B_4 sh\alpha x\sin\alpha x \\
\vartheta &= 2\left[-B_1\left(ch\alpha x\sin\alpha x - sh\alpha x\cos\alpha x\right) + B_2\left(ch\alpha x\cos\alpha x + sh\alpha x\sin\alpha x\right)\right. \\
&\quad \left. + B_3\left(-sh\alpha x\sin\alpha x + ch\alpha x\cos\alpha x\right) + B_4\left(sh\alpha x\cos\alpha x + ch\alpha x\sin\alpha x\right)\right] \\
M &= 2EI\alpha^2\left(B_1 sh\alpha x\sin\alpha x - B_2 sh\alpha x\cos\alpha x + B_3 ch\alpha x\sin\alpha x - B_4 ch\alpha x\cos\alpha x\right) \\
Q &= 2EI\alpha^3\left[B_1\left(ch\alpha x\sin\alpha x + sh\alpha x\cos\alpha x\right) - B_2\left(ch\alpha x\cos\alpha x - sh\alpha x\sin\alpha x\right)\right. \\
&\quad \left. + B_3\left(ch\alpha x\cos\alpha x + sh\alpha x\sin\alpha x\right) + B_4\left(ch\alpha x\sin\alpha x - sh\alpha x\cos\alpha x\right)\right.
\end{aligned}\right\} \quad (3.12)
$$

式（3.12）中积分常数B1、B2、B3、B4的确定是一个重要环节，梁在任一截面都有四个参数量，即挠度y、转角 ϑ、弯矩M、剪力Q、而初始截面（x=0）的四个参数 y_o ϑ_o、M_o、Q_o 就叫做初参数。

用初参数法计算了弹性地基梁的基本思路是，把四个积分常数改用四个初参数来表示，这样做的好处是:

- 使积分常数具有明确的物理意义;
- 根据初参数的物理意义来寻求简化计算的途径。

B 用初参数表示积分常数

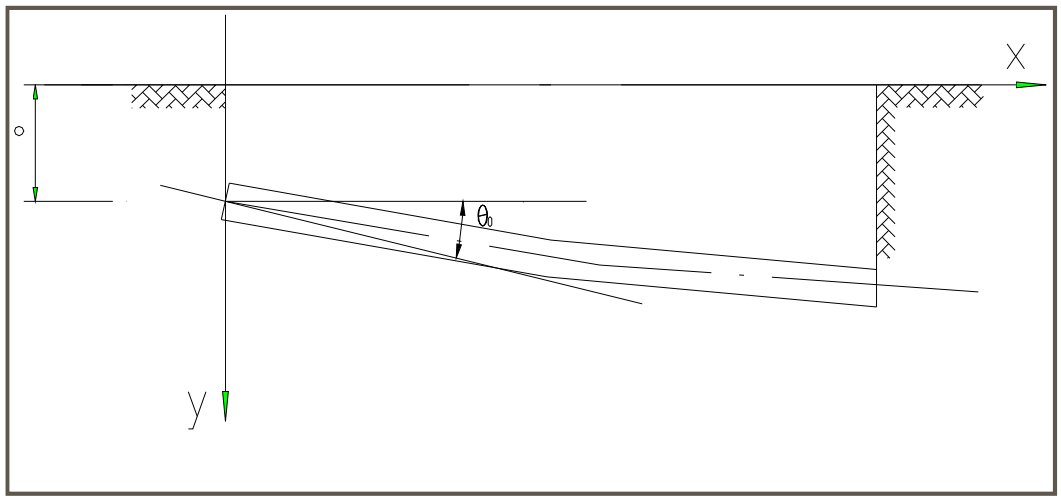


图3.4 弹性地基梁作用的初参数

如图3.4所示，梁左端的四个边界条件（初参数）为

$$\left.\begin{aligned} y|_{x=o} &= y_o \\ \vartheta|_{x=o} &= \vartheta_o \\ M|_{x=o} &= M_o \\ Q|_{x=o} &= Q_o \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

将上式代入式（3.12），解出积分常数得:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= y_o \\ B_2 &= \frac{1}{2\alpha}\vartheta_o - \frac{1}{4\alpha^3 EI}Q_o \\ B_3 &= \frac{1}{2\alpha}\vartheta_o + \frac{1}{4\alpha^3 EI}Q_o \\ B_4 &= -\frac{1}{2\alpha^3 EI}M_o \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

再将式（3.14）代入式（3.12），并注意 $\alpha = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}}$，则有

$$\left.\begin{aligned} y &= y_o\varphi_1 + \vartheta_o\frac{1}{2\alpha}\varphi_2 - M_o\frac{2\alpha^2}{bk}\varphi_3 - Q_o\frac{\alpha}{bk}\varphi_4 \\ \vartheta &= -y_o\alpha\varphi_4 + \vartheta_o\varphi_1 - M_o\frac{2\alpha^3}{bk}\varphi_2 - Q_o\frac{2\alpha^2}{bk}\varphi_3 \\ M &= y_o\frac{bk}{2\alpha^2}\varphi_3 + \vartheta_o\frac{bk}{4\alpha^3}\varphi_4 + M_o\varphi_1 + Q_o\frac{1}{2\alpha}\varphi_2 \\ Q &= y_o\frac{bk}{2\alpha^2}\varphi_2 + \vartheta_o\frac{bk}{4\alpha^3}\varphi_3 + M_o\alpha\varphi_4 + Q_o\varphi_1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

其中

$$\varphi_1 = ch\alpha x \cos\alpha x$$
$$\varphi_2 = ch\alpha x \sin\alpha x + sh\alpha x \cos\alpha x$$
$$\varphi_3 = sh\alpha x \sin\alpha x$$
$$\varphi_4 = ch\alpha x \sin\alpha x - sh\alpha x \cos\alpha x$$

φ_1、φ_2、φ_3、φ_4 及称为双曲线三角函数，它们之间有如下微分关系：

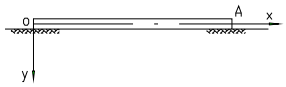
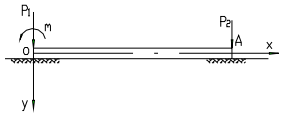
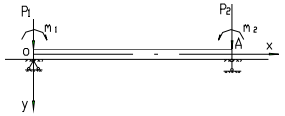
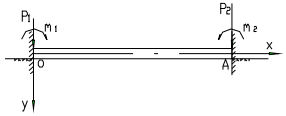
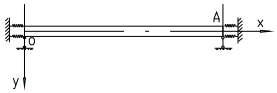
$$\frac{d\varphi_1}{d\alpha} = -\alpha\varphi_4$$
$$\frac{d\varphi_2}{d\alpha} = 2\alpha\varphi_1$$
$$\frac{d\varphi_3}{d\alpha} = \alpha\varphi_2$$
$$\frac{d\varphi_4}{d\alpha} = 2\alpha\varphi_3$$

◆式（3.15）即为用初参数表示的齐次微分方程的解，
◆该式的一个显著优点是式中每一项都具有明确的物理意义，
◆如式（3.15）中的第一式中，φ_1 表示当原点有单位挠度（其它三个初参数均为零）时梁的挠度方程，

$\frac{\varphi_2}{2\alpha}$ 表示原点有单位转角时梁的挠度方程，
等等；

另一个显著优点是，在四个待定常数 ϑ_o、y_o、M_o、Q_o 中有两个参数可由原点端的两个边界条件直接求出，另两个待定初参数由另一端的边界条件来确定。这样就使确定参数的工作得到了简化。表3.1（Page 54）列出了实际工程中常遇到的支座形式反荷载作用下梁端参数的值。

表 3.1

	弹 性 地 基 梁	已知初参数	A端边界条件	待求初参数
自由端		$M_0=0$ $Q_0=0$	$M_A=0$ $Q_A=0$	θ_0 y_0
		$M_0=-m$ $Q_0=-P_1$	$M_A=0$ $Q_A=P_2$	θ_0 y_0
简支端		$M_0=0$ $y_0=0$	$M_A=0$ $y_A=0$	θ_0 Q_0
		$M_0=m_1$ $y_0=0$	$M_A=m_2$ $y_A=0$	θ_0 Q_0
固定端		$\theta_0=0$ $y_0=0$	$\theta_A=0$ $y_A=0$	M_0 Q_0
		$\theta_0=0$ $y_0=0$	$\theta_A=0$ $y_A=0$	M_0 Q_0
弹性固定端		$y_0=0$	$y_A=0$	$\theta_0=M_0\ \beta_0$ M_0 Q_0

3.3.5 弹性地基梁挠曲微分方程的特解

式（3.7）等价于地基梁仅在初参数作用下的挠曲微分方程，式（3.6）等价于地基梁既有初参数作用，又有外荷载作用的挠曲微分方程，其特解项就是仅在外荷载作用下引起的梁挠度的附加项。下面根据梁上作用的各种形式荷载分别加以讨论。

A 集中荷载作用的特解项

A.1 集中力作用的特解项

如图3.5为一弹性地基梁，O端作用有初参数 ϑ_o、y_o、M_o Q_o ，A点有集中力p。设y1为OA段的挠度，y2为AB段的挠度，由于梁上无分布荷载作用，故OA和AB段的挠曲微分方程分别为

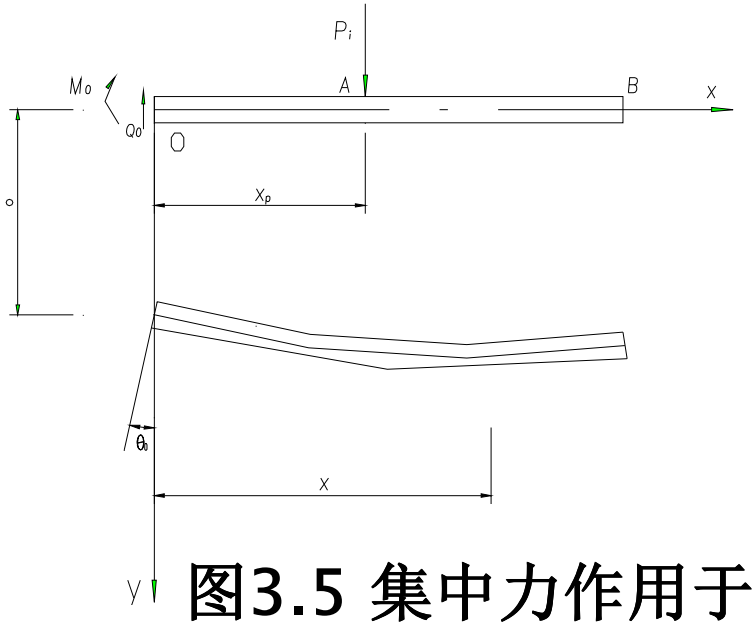


图3.5 集中力作用于地基梁

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} + 4\alpha^4 y_1 = o \qquad (3.16a)$$

$$\frac{d^4 y_2}{dx'^4} + 4\alpha^4 y_2 = o \qquad (3.16b)$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{Kb}{EI}}$$

其中 $x' = x - x_p$

式（3.16a）的解可用梁端初参数来表示，即

$$y_1 = y_o\varphi_1 + \vartheta_o \frac{1}{2\alpha}\varphi_2 - M_o \frac{2\alpha^2}{bk}\varphi_3 - Q_o \frac{\alpha}{bk}\varphi_4 \qquad (3.17)$$

式（3.16b）的解可用初参数作用下的解y1与集中力pi单独作用下引起的附加项叠加，即 $y_2 = y_1 + \Delta yp$ （3.18）

将式（3.18）代入式（3.16b），并注意式（3.16a）有

$$\frac{d^4\Delta yp}{dx'^4} + 4\alpha^4\Delta y_p = o \qquad (3.19)$$

比较式（3.16a）和式（3.16b）知，式（3.19）解的形式与式（3.17）相同，不同之处是将x换为 x'，四个初参数应解释为 $x = x_p$ 处的突变挠度 y_{A1}，转角 ϑ_{A1}，弯矩 M_{A1}，剪力 Q_{A1}，故有

$$\Delta y_p = y_{A1}\varphi_{1\alpha}\left(x - x_p\right) + \vartheta_{A1}\frac{1}{2\alpha}\varphi_{2\alpha}\left(x - x_p\right)$$

$$- M_{A1}\frac{2\alpha^2}{bk}\varphi_{3\alpha}\left(x - x_p\right) - Q_{A1}\frac{\alpha}{bk}\varphi_{4\alpha}\left(x - x_p\right) \qquad (3.20)$$

由A点的变形连续条件和受力情况有

$$y_{A1}=\vartheta_{A1}=MA_1=o,Q_{A1}=-pi$$

代入式（3.20），并据式（3.5）得

$$\left.\begin{aligned}\Delta y_p&=pi\frac{\alpha}{bk}\varphi_{4\alpha(x-x_p)}\\ \Delta\vartheta_p&=\frac{2\alpha^2 pi}{bk}\varphi_{3\alpha(x-x_p)}\\ \Delta M_p&=-\frac{pi}{2\alpha}\varphi_{2\alpha(x-x_p)}\\ \Delta Q_p&=-pi\varphi_{1\alpha(x-x_p)}\end{aligned}\right\}(x\geq x_p)\qquad(3.21)$$

当$x\angle xp$时，取特解项为零。

A.2 集中力偶mi作用的特解项

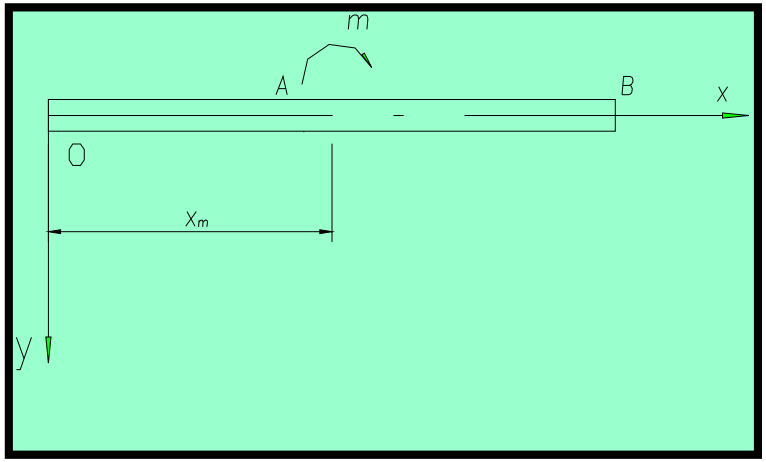


图3.6 集中力偶作用于地基梁

由pi作用下特解项的推导结果可知，挠度附加项形式与初参数Q。作用下的挠度相同，只是坐标起点与符号不同。同理，在集中力偶mi作用下挠度附加项与初参数M。作用下挠度也具有相同的形式，如图3.6所示，Mo=Mi，故有

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y_m &= -\frac{2\alpha^2 m}{bk}\varphi_{3\alpha(x-x_m)} \\
\Delta \vartheta_m &= -mi\frac{2\alpha^3}{bk}\varphi_{2\alpha(x-x_m)} \\
\Delta M_m &= mi\varphi_{1\alpha(x-x_m)} \\
\Delta Q_m &= -mi\alpha\varphi_{4\alpha(x-x_m)}
\end{aligned}\right\}(x \geq x_m) \qquad (3.22)$$

当 $x \angle x_m$ 时，取特解项为零。

B 分布荷载作用下的特解项

分布荷载可分解成多个集中力，按集中力求特解项，为此，在x截面左边，离端点的距离为u处取微段du，微段上荷载为qdu，此微荷载在它右边的截面x处引起的挠度特解项为（如图3.7）

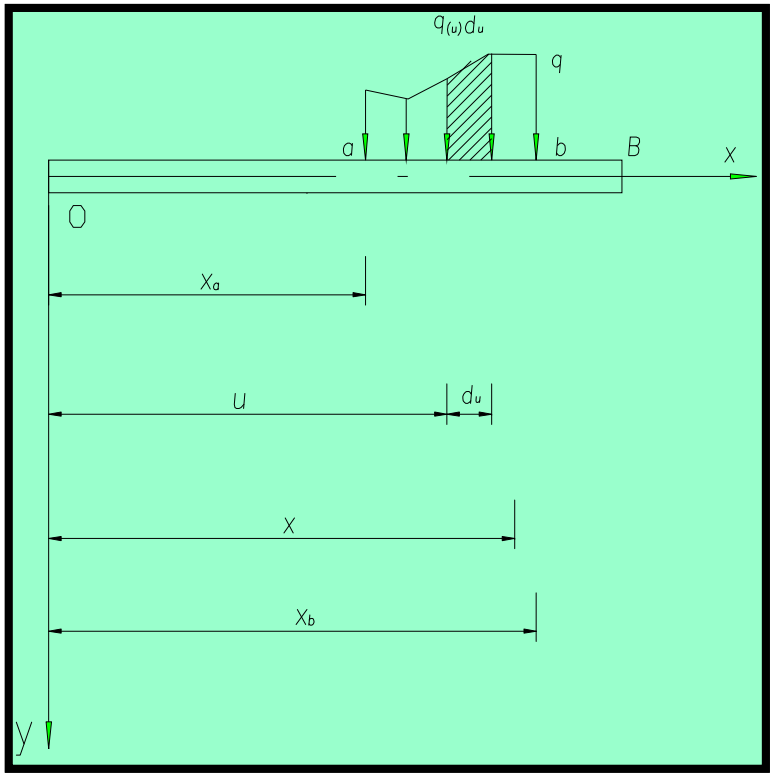


图3.7 分布荷载作用于地基梁

$$dy_2 = \frac{2qdu}{bk}\varphi_{4\alpha(x-u)}$$ 见（3.21）

而x截面以左所有荷载引起的特解项为

$$\Delta y_q = \int_{x_a}^{x} \frac{2q}{bk}\varphi_{4\alpha(x-u)}\,du \qquad (3\text{-}23)$$

下面讨论分布荷载的几种特殊情况。

B.1 均布荷载

如图3.7，荷载均布于ab段，对于oa段显然没有附加项，当 $x_a \le x \le x_b$ 时，积分限是 $[x_a, x]$，由式（3.23）及式（3.5）有

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y_q &= \frac{q}{bk}\left[1-\varphi_{1\alpha(x-x_a)}\right] \\
\Delta \vartheta_q &= \frac{2\alpha}{bk}\varphi_{4\alpha(x-x_a)} \\
\Delta M_q &= -\frac{q}{2\alpha^2}\varphi_{2\alpha(x-x_a)} \\
\Delta Q_q &= -\frac{q}{2\alpha}\varphi_{2\alpha(x-x_a)}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.24)$$

当 $x \ge x_b$ 时，积分限是（xa、xb），由式（3.23）及式(3.5)有

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y_q &= \frac{q}{bk}\left[\varphi_{1\alpha(x-x_b)}-\varphi_{1\alpha(x-x_a)}\right] \\
\Delta \vartheta_q &= -\frac{2\alpha}{bk}\left[\varphi_{4\alpha(x-x_b)}-\varphi_{4\alpha(x-x_a)}\right] \\
\Delta M_q &= \frac{q}{2\alpha^2}\left[\varphi_{3\alpha(x-x_b)}-\varphi_{3\alpha(x-x_a)}\right] \\
\Delta Q_q &= -\frac{q}{2\alpha^2}\left[\varphi_{2\alpha(x-x_b)}-\varphi_{2\alpha(x-x_a)}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

当荷载满跨均布时，积分限是（0、x），故有

$$\left.\begin{aligned}\Delta y_q &= \frac{q}{bk}(1-\varphi_1)\\ \Delta\vartheta_q &= \frac{2\alpha}{bk}\varphi_4\\ \Delta M_q &= -\frac{q}{2\alpha^2}\varphi_3\\ \Delta Q_q &= -\frac{q}{2\alpha}\varphi_2\end{aligned}\right\} \qquad (3.26)$$

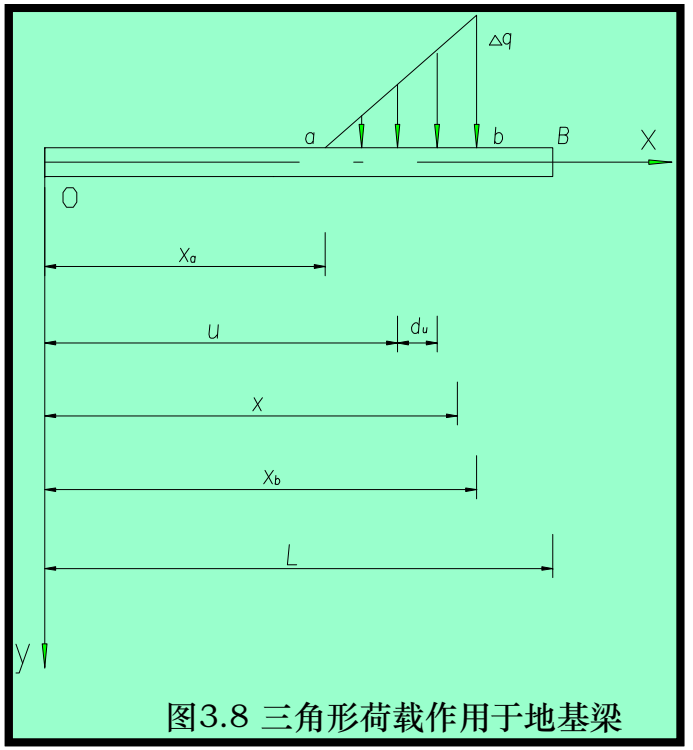


图3.8 三角形荷载作用于地基梁

B.2 三角形分布荷载

如图3.8所示，三角形荷载分布于ab段，有

$$\Delta y_{\Delta q} = \int_{x_a}^{x} \frac{2\Delta_{qu}}{bk}\varphi_{4\alpha}(x-u)^{du} \qquad (3.27)$$

当 $x_a \le x \le x_b$ 时，积分限为 (x_a, x)，由式（3.27）及式（3.5）得

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y_{\Delta q} &= \frac{\Delta q}{k(x_b - x_a)}\left[(x - x_a) - \frac{1}{2\alpha}\varphi_{2\alpha(x-x_a)}\right] \\
\Delta \vartheta_{\Delta q} &= \frac{\Delta q}{x_b - x_a}\cdot\frac{1}{bk}\left[1 - \varphi_{1\alpha(x-x_a)}\right] \\
\Delta M_{\Delta q} &= -\frac{\Delta q}{x_b - x_a}\cdot\frac{1}{4\alpha^3}\varphi_{2\alpha(x-x_a)} \\
\Delta Q_{\Delta q} &= -\frac{\Delta q}{x_b - x_a}\cdot\frac{1}{2\alpha^2}\varphi_{3\alpha(x-x_a)}
\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

当 $x \ge x_b$ 时，积分限是 $[x_a, x_b]$，同理得

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y_{\Delta q} &= \frac{\Delta q}{k(x_b - x_a)}\left\{(x_b - x_a)\varphi_{1\alpha(x-x_b)} + \frac{1}{2\alpha}\left[\varphi_{2\alpha(x-x_b)} - \varphi_{2\alpha(x-x_a)}\right]\right\} \\
\Delta \vartheta_{\Delta q} &= -\frac{\alpha\Delta q}{k(x_b - x_a)}\left\{(x_b - x_a)\varphi_{4\alpha(x-x_b)} - \frac{1}{2\alpha}\left[\varphi_{1\alpha(x-x_b)} - \varphi_{1\alpha(x-x_a)}\right]\right\} \\
\Delta M_{\Delta q} &= \frac{\Delta q}{2\alpha^2(x_b - x_a)}\left\{(x_b - x_a)\varphi_{3\alpha(x-x_b)} + \frac{1}{2\alpha}\left[\varphi_{4\alpha(x-x_b)} - \varphi_{4\alpha(x-x_a)}\right]\right\} \\
\Delta Q_{\Delta q} &= \frac{\Delta q}{2\alpha(x_b - x_a)}\left\{(x_b - x_a)\varphi_{2\alpha(x-x_b)} + \frac{1}{2}\left[\varphi_{3\alpha(x-x_b)} - \varphi_{3\alpha(x-x_a)}\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

当三角形荷载布满全跨时，积分限是（0、x）有

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y_{\Delta q} &= \frac{\Delta q}{bkl}\left(x-\frac{1}{2\alpha}\varphi_2\right)\\
\Delta \vartheta_{\Delta q} &= \frac{\Delta q}{bkl}(\\
\Delta M_{\Delta q} &= -\frac{\Delta q}{4\alpha^3 l}\varphi_4\\
\Delta Q_{\Delta q} &= -\frac{\Delta q}{2\alpha^2 l}\varphi_3
\end{aligned}\right| \qquad (3.30)$$

B.3 梁全跨布满梯形荷载的特解项

如图3.9所示的地基梁在梯形荷载作用下的特解项只须把式(3.26)与式（3.30）两式叠加即可。

C 弹性地基梁在 ϑ_o、y_o、M_o、Q_o 、pi 、Mi 、q、Δq共同作用下挠曲微分方程的通解

如图3.10所示的弹性地基梁，同时作用有集中力、力偶、均布载、三角载时，综合各种荷载的影响，就可得出挠度的一般公式，进行微分运算后，还可得出转角、弯矩及剪力的一般公式，即

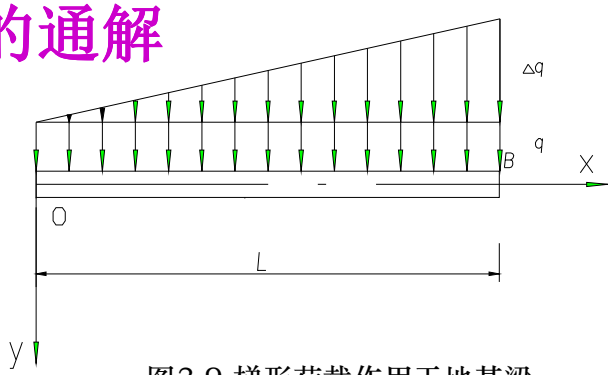


图3.9 梯形荷载作用于地基梁

图3.9 梯形荷载作用于地基梁

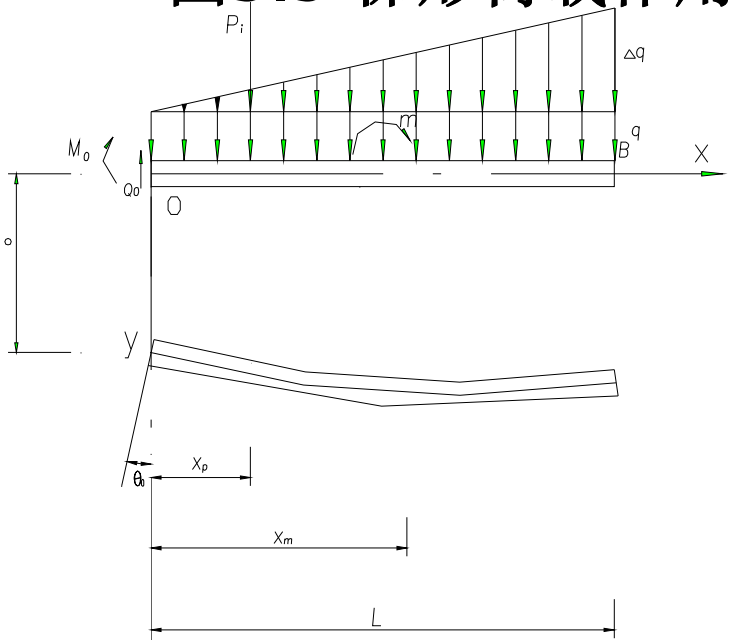


图3.10 综合荷载作用于地基梁

$$
\left.
\begin{aligned}
y &= y_o\varphi_1 + \frac{\vartheta_o}{2\alpha}\varphi_2 - \frac{2Q_o}{bk}\varphi_4 + \frac{2p_i}{bk}\varphi_{4\alpha(x-xp)} \\
&\quad - \frac{2\alpha^2 mi}{bk}\varphi_{3\alpha(x-x_m)} + \frac{q}{bk}(1-\varphi_1) + \frac{\Delta q}{bkl}\left(x - \frac{1}{2\alpha}\varphi_2\right) \\
\vartheta &= -\alpha y_o\varphi_4 + \vartheta_o\varphi_1 - \frac{2\alpha^3 M_o}{bk}\varphi_2 - \frac{2\alpha^2 Q_o}{bk}\varphi_3 + \frac{2\alpha^2}{bk}p_i\varphi_{3\alpha(x-xp)} \\
&\quad - \frac{2\alpha^3 mi}{bk}\varphi_{2\alpha(x-x_m)} + \frac{2q}{bk}\varphi_4 + \frac{\Delta q}{bkl}(1-\varphi_1) \\
M &= \frac{bky_o}{2\alpha^2}\varphi_3 + \frac{bk\vartheta_o}{4\alpha^3}\varphi_4 + M_o\varphi_1 + \frac{Q_o}{2\alpha}\varphi_2 - \frac{p_i}{2\alpha}\varphi_{2\alpha(x-x_p)} \\
&\quad + mi\varphi_{i\alpha(x-x_m)} - \frac{q}{2\alpha^2}\varphi_3 - \frac{\Delta q}{4\alpha^3 l}\varphi_4 \\
Q &= \frac{bky_o}{2\alpha^2}\varphi_2 + \frac{bk\vartheta_o}{2\alpha^2}\varphi_3 + \alpha M_o\varphi_4 + Q_o\varphi_1 - p_i\varphi_{1\alpha(x-x_p)} \\
&\quad - 2mi\varphi_{4\alpha(x-x_m)} - \frac{q}{2\alpha}\varphi_2 - \frac{\Delta q}{4\alpha^3 l}\varphi_3
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.31)
$$

式（3.31）中，当 $x \angle x_b$，$x \angle x_m$ 时，pi 、mi两项取值为零。

3.4 弹性地基短梁、长梁及刚性梁

上节的结果，能直接用于计算各种几何尺寸及弹性特征系数 α 的弹性地基等截面直梁。在工程实践中，经计算比较及分析表明，可根据不同的换算长度 $\lambda = \alpha l$，将地基梁进行分类，然后采用不同的方法进行简化。通常将弹性地基梁分为三种类型。

弹性地基梁的分类

- 短梁（又称有限长梁）（图3.11（a））， 当弹性地基梁的换算长度 $1 \angle \lambda \angle 2.75$ 时，属于短梁，它是弹性地基梁的一般情况。

•长梁：无限长梁（图3.11（b））、半无限长梁（图3.11（c））。当换算长度 $\lambda \geq 2.75$ 时，属于长梁；若荷载作用点距梁两端的换算长度均不小于2.75 时，可忽略该荷载对梁端的影响，这类梁称为无限长梁；若荷载作用点仅距梁一端的换算长度 ≥ 2.75 时，可忽略该荷载对这一端的影响，而对另一端的影响不能忽略，这类梁称为半无限长梁，无限长梁可化为两上半无限长梁

•刚性梁（3.11（b）），当换算长度 $\lambda \leq 1$ 时，属于刚性梁。这时，可认为梁是绝对刚性的，即 $EI \to \infty$ 或 $\alpha \to 0$。

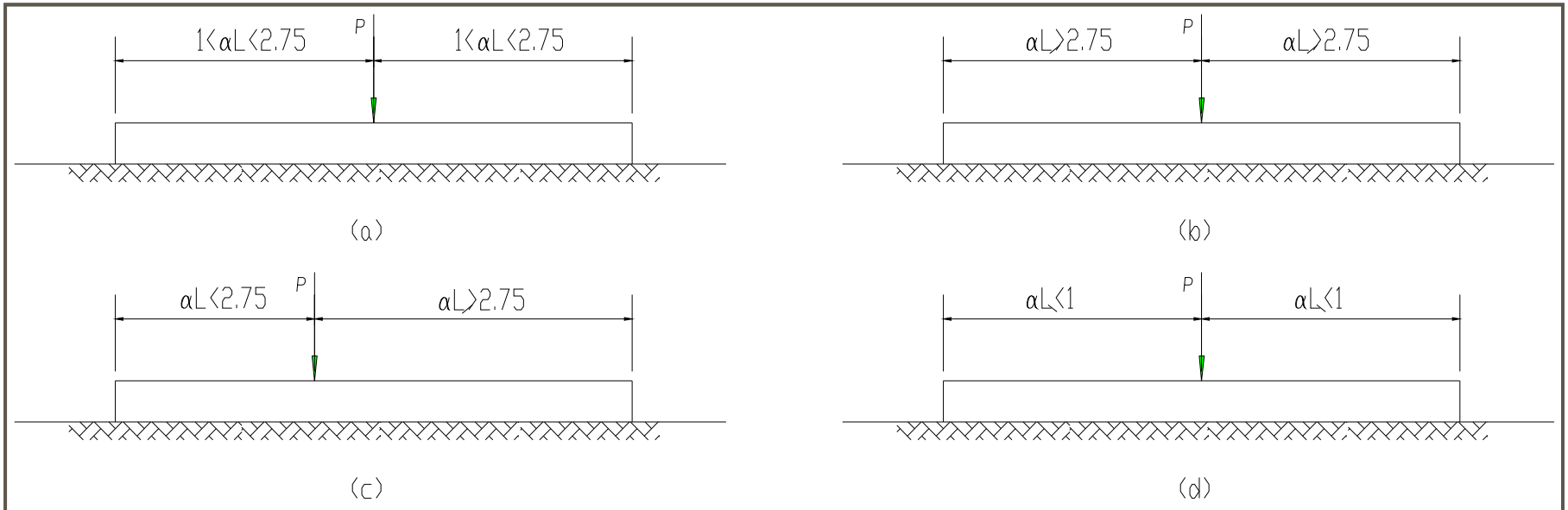


图3.11 弹性地基梁的分类

(a) 短梁 ;(b) 无限长梁 ;(c) 半无限长梁 ;(d) 刚性梁 ;

长梁、短梁和刚性梁的划分标准主要依据梁的实际长度与梁和地基的相对刚度之乘积，划分的目的是为了简化计算。事实上，长梁和刚性梁均可按上一节介绍的公式进行计算，但长梁、刚性梁与短梁相比有其自身的一些特点，较短梁相比，计算可以进一步简化。

3.4.1 长梁的计算

A 无限长梁作用集中力Pi的计算

如图3.12所示，梁上作用有集中力Pi，由于力作用点至两端点均满足$\alpha\ell \geq 2.75$，故把梁看作无限长梁。又因梁上分布荷载 $q_{(x)} = o$，为便于分析，现采用梁挠曲方程齐次解式的形式，即

$$y = e^{\alpha x}\left(A_1 \cos\alpha x + A_2 \sin\alpha x\right) + e^{-\alpha x}\left(A_3 \cos\alpha x + A_4 \sin\alpha x\right) \qquad (3.10)$$

由条件 $y \mid x \to \infty = o$有：$A_1 = A_2 = o$ ；又由对称条件知$\vartheta = \dfrac{dy}{dx} \mid x = o$,故$A_3 = A_4 = A$

考虑地基反力与外载Pi的平衡条件：

$$2kbA\int_o^{\infty} e^{-\alpha x}\left(\cos\alpha x + \sin\alpha x\right)dx = P_i$$

$$A = \frac{P_i\alpha}{2kb}$$

式（3.10）可写为

$$y = \frac{P_i\alpha}{2kb} e^{-\alpha x}\left(\cos\alpha x + \sin\alpha x\right) \qquad (3.32)$$

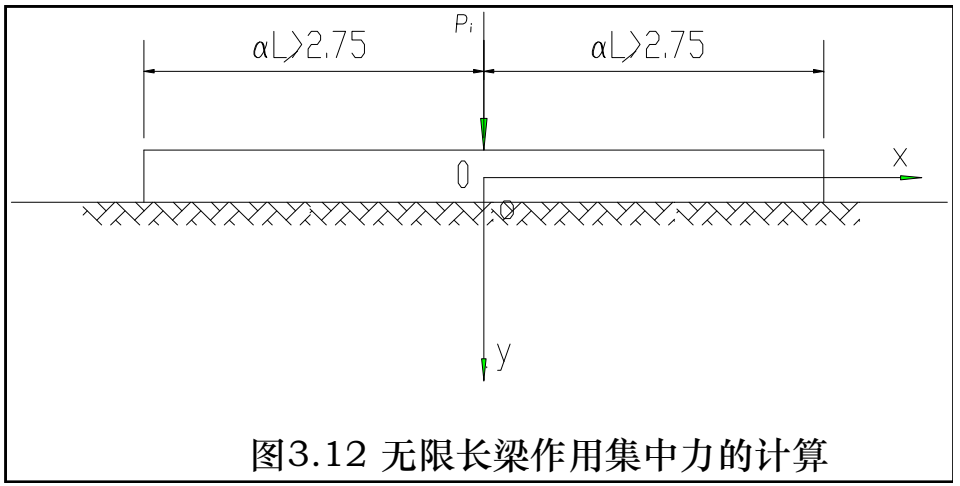


图3.12 无限长梁作用集中力的计算

最后可得无限长梁右半部分的挠度、转角、弯矩及剪力：

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\alpha P_i}{2kb}\psi_7 \\ \vartheta &= -\frac{\alpha^2 P_i}{kb}\psi_8 \\ M &= \frac{P_i}{4\alpha}\psi_5 \\ Q &= -\frac{P_i}{2}\psi_6 \end{aligned}\right\} \qquad (3.33)$$

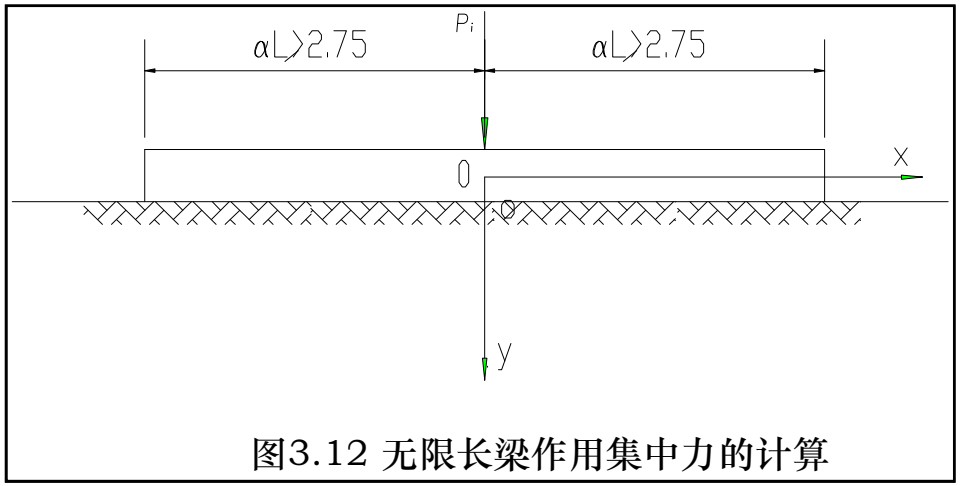


图3.12 无限长梁作用集中力的计算

其中

$$\psi_5 = e^{-\alpha x}\left(\cos\alpha x + \sin\alpha x\right)$$

$$\psi_6 = e^{-\alpha x}\cos\alpha x$$

$$\psi_7 = e^{-\alpha x}\left(\cos\alpha x + \sin\alpha x\right)$$

$$\psi_8 = e^{-\alpha x}\sin\alpha x$$

对于梁的左半部分，只需将式（3.33）中Q和Theta改变符号即可。

B 无限长梁在集中力偶mi作用下的计算 force couple

如图3.13(a)所示无限长梁，作用集中力偶，

尽管mi作用点并不一定在梁的对称截面上，但只要mi作用点到两端满足 $\alpha \ell \geq 2.75$ 则mi作用点，就可看作是梁的对称点，因而可把梁分为两根半无限长梁（图3.13(b)、(c)）。梁对称截面上的反对称条件为

$$y|_{x=o} = o$$

$$M|_{x=o} = \frac{m_i}{2}$$

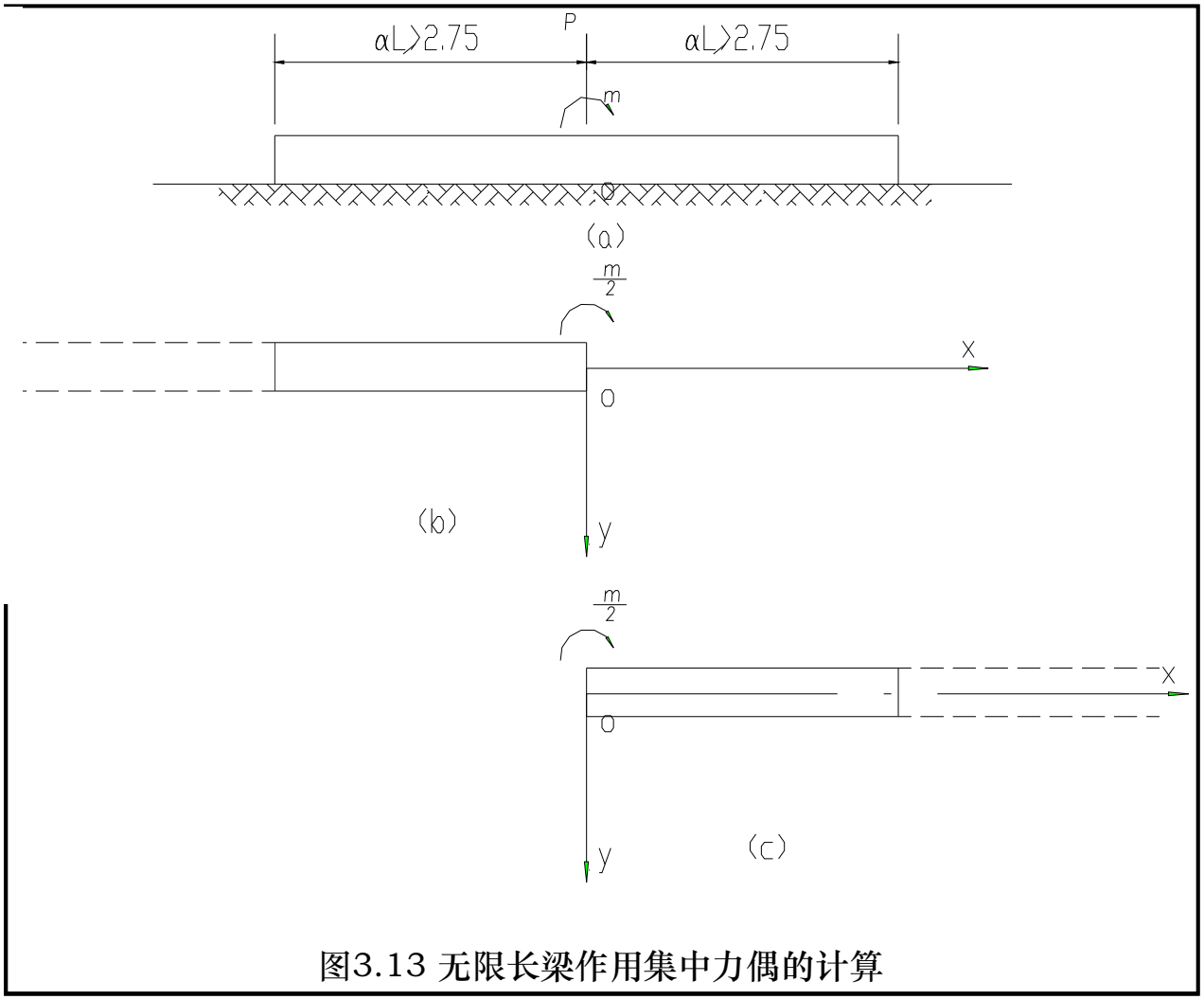


图3.13 无限长梁作用集中力偶的计算

代入式（3.10）得A1=A2=A3=0及 $A_4\frac{\alpha^2 m_i}{bk}$ ，最后得无限长梁右半部分的变形及内力为：

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\alpha^2 m_i}{kb}\psi_8 \\ \vartheta &= -\frac{\alpha^3 m_i}{kb}\psi_5 \\ M &= \frac{m_i}{2}\psi_6 \\ Q &= -\frac{\alpha m_i}{2}\psi_7 \end{aligned}\right\} \qquad (3.34)$$

对于左半部分，只需将上式中y与M变号即可。

C 半无限长梁作用初参数的计算

如图（3.14）所示的半无限长梁，梁端作用有初参数，因 $q(x)=o$ ，故可借助挠曲方程齐次解的结果，为了方便分析，采用式（3.11）的形式：

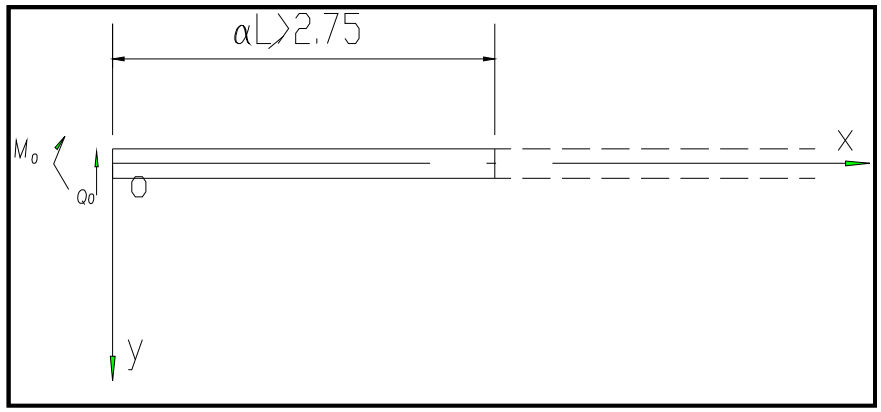


图3.14 半无限长梁作用的初参数

$$y=(B_1ch\alpha+B_3sh\alpha x)\cos\alpha x+(B_2ch\alpha+B_4sh\alpha x)\sin\alpha x$$

由 $y|_{x\to\infty}=o$ 代入上式得

$$B_1ch\alpha x+B_3sh\alpha x=o$$

$$B_2ch\alpha x+B_4sh\alpha x=o$$

故有B1=-B3，B2=-B4

再由 $M\big|_{x=o}=M_o, Q\big|_{x=o}=Q_o$， 得

$$B_1=-\frac{Q_o}{2EI\alpha^3}-\frac{M_o}{2EI\alpha^2}$$

$$B_2=\frac{M_o}{2EI\alpha^2}$$

最后得

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{2\alpha}{bk}\left(-Q_o\varphi_6-M_o\alpha\varphi_5\right)\\ \vartheta&=\frac{2\alpha^2}{k}\left(Q_o\varphi_7-2M_o\alpha\varphi_6\right)\\ M&=\frac{1}{\alpha}\left(Q_o\varphi_8+M_o\alpha\varphi_7\right)\\ Q&=Q_o\varphi_5-2\alpha M_o\varphi_8 \end{aligned}\right\} \qquad (3.35)$$

如梁端作用有初参数 y_o ϑ_o 则可得y_o 、ϑ_o 与M_o Q_o 之间的关系为

$$y_o=-\frac{2\alpha}{bk}\left(Q_o+\alpha M_o\right)$$

$$\vartheta o=\frac{2\alpha^2}{bk}\left(Q_o+2\alpha M_o\right)$$

D 半无限长梁在梯形荷载作用下的计算

如图3.15所示的半无限长梁，作用分布荷载q、△q，其挠曲方程为式（3.7）。容易验证，$y=\frac{q_{(x)}}{bk}$ 是式（3.7）的一个特解，故在梯形分布荷载作用下半无限长梁任一截面的变形与内力为：

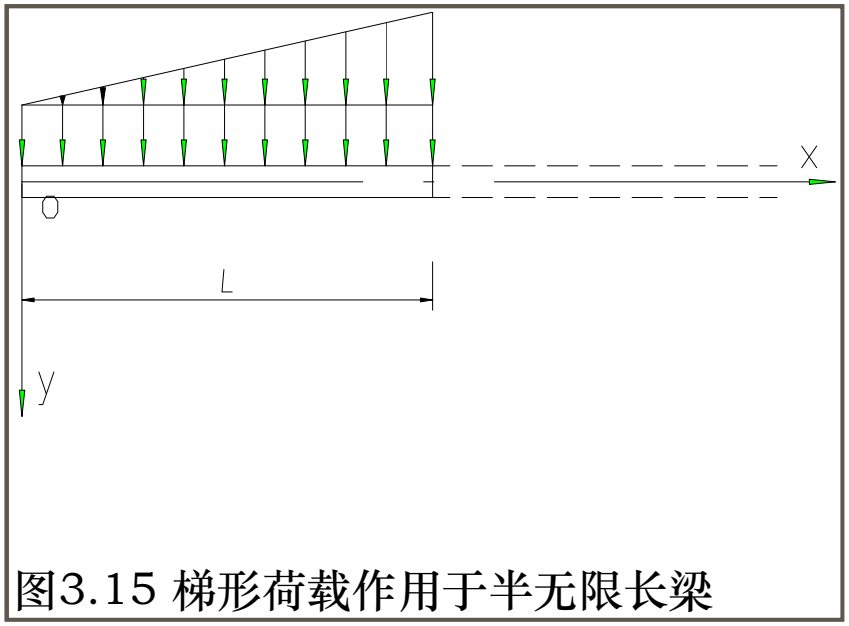


图3.15 梯形荷载作用于半无限长梁

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{q}{bk}+\frac{x}{bit\Delta q} \\ \vartheta &= \frac{\Delta q}{bkl} \\ M &= o \\ Q &= o \end{aligned}\right\} \qquad (3.36)$$

3.4.2 刚性梁的计算

如图3.16所示的刚性梁，梁端作用有初参数y_o和ϑ_o，并有梯形分布的荷载作用，显然，地基反力也呈梯形分布，按静定梁的平衡条件，可得刚性梁的变形与内力为：

$$\left.\begin{aligned} y &= y_o + \vartheta_o x \\ \vartheta &= \vartheta_o \\ M &= k y_o \frac{1}{2}x^2 + \frac{k}{6}\vartheta_o x^3 - \frac{qx^2}{2} - \frac{\Delta q}{6\ell}x^3 \\ Q &= x y_o k + \frac{1}{2}x^2 k\vartheta_o - qx - \frac{\Delta q}{2\ell}x \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

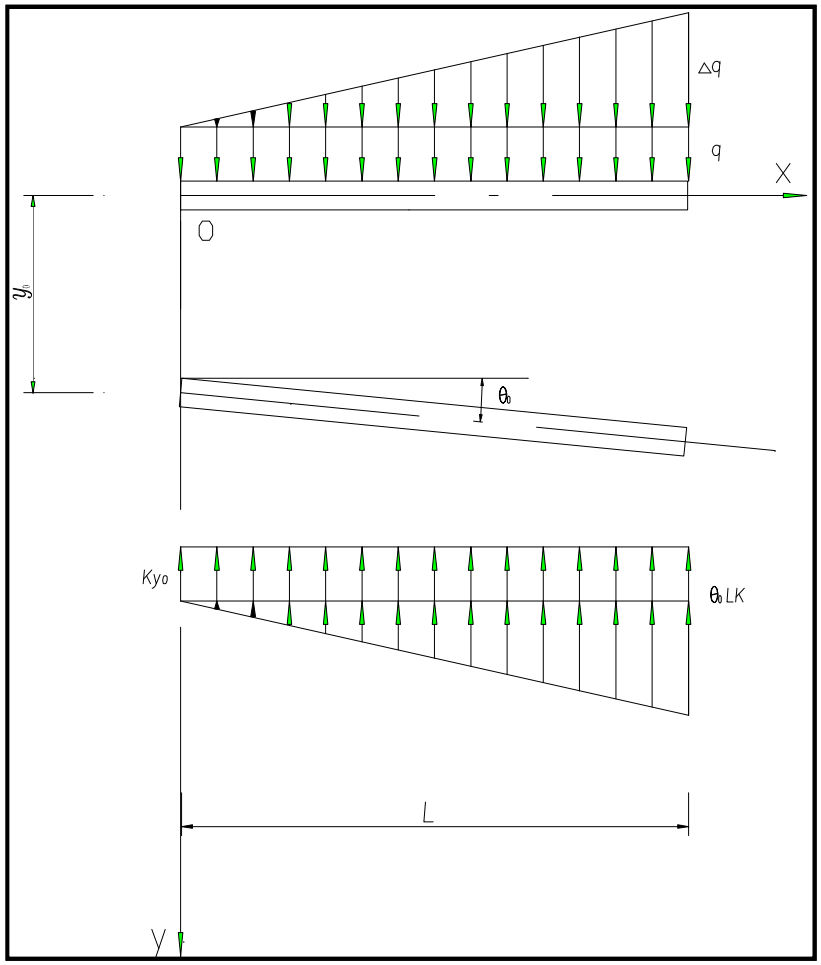


图3.16 刚性梁的计算

弹性地基梁的求解

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ky=q_{(x)} \qquad (3.6)$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ky=0$$

此即为弹性地基梁的挠曲微分方程式

$$\left.\begin{aligned}
y &= B_1 ch\alpha x\cos\alpha x + B_2 ch\alpha x\sin\alpha x + B_3 sh\alpha x\cos\alpha x + B_4 sh\alpha x\sin\alpha x \\
\vartheta &= 2\left[-B_1\left(ch\alpha x\sin\alpha x - sh\alpha x\cos\alpha x\right)+B_2\left(ch\alpha x\cos\alpha x + sh\alpha x\sin\alpha x\right)\right. \\
&\quad \left.+B_3\left(-sh\alpha x\sin\alpha x + ch\alpha x\cos\alpha x\right)+B_4\left(sh\alpha x\cos\alpha x + ch\alpha x\sin\alpha x\right)\right] \\
M &= 2EI\alpha^2\left(B_1 sh\alpha x\sin\alpha x - B_2 sh\alpha x\cos\alpha x + B_3 ch\alpha x\sin\alpha x - B_4 ch\alpha x\cos\alpha x\right) \\
Q &= 2EI\alpha^3\left[B_1\left(ch\alpha x\sin\alpha x + sh\alpha x\cos\alpha x\right)-B_2\left(ch\alpha x\cos\alpha x - sh\alpha x\sin\alpha x\right)\right. \\
&\quad \left.+B_3\left(ch\alpha x\cos\alpha x + sh\alpha x\sin\alpha x\right)+B_4\left(ch\alpha x\sin\alpha x - sh\alpha x\cos\alpha x\right)\right.
\end{aligned}\right\}$$

(3.12)

初参数解（用边界条件求出待定参数B1/B2/B3/B4）

$$
\begin{aligned}
y &= y_o\varphi_1 + \vartheta_o\frac{1}{2\alpha}\varphi_2 - M_o\frac{2\alpha^2}{bk}\varphi_3 - Q_o\frac{\alpha}{bk}\varphi_4 \\
\vartheta &= -y_o\alpha\varphi_4 + \vartheta_o\varphi_1 - M_o\frac{2\alpha^3}{bk}\varphi_2 - Q_o\frac{2\alpha^2}{bk}\varphi_3 \\
M &= y_o\frac{bk}{2\alpha^2}\varphi_3 + \vartheta_o\frac{bk}{4\alpha^3}\varphi_4 + M_o\varphi_1 + Q_o\frac{1}{2\alpha}\varphi_2 \\
Q &= y_o\frac{bk}{2\alpha^2}\varphi_2 + \vartheta_o\frac{bk}{4\alpha^3}\varphi_3 + M_o\alpha\varphi_4 + Q_o\varphi_1
\end{aligned}
\qquad (3.15)
$$

$$
\begin{aligned}
y &= y_o\varphi_1 + \frac{\vartheta_o}{2\alpha}\varphi_2 - \frac{2Q_o}{bk}\varphi_4 + \frac{2p_i}{bk}\varphi_{4\alpha(x-xp)} \\
&\quad - \frac{2\alpha^2 mi}{bk}\varphi_{3\alpha(x-x_m)} + \frac{q}{bk}(1-\varphi_1) + \frac{\Delta q}{bkl}\left(x - \frac{1}{2\alpha}\varphi_2\right) \\
\vartheta &= -\alpha y_o\varphi_4 + \vartheta_o\varphi_1 - \frac{2\alpha^3 M_o}{bk}\varphi_2 - \frac{2\alpha^2 Q_o}{bk}\varphi_3 + \frac{2\alpha^2}{bk}p_i\varphi_{3\alpha(x-xp)} \\
&\quad - \frac{2\alpha^3 mi}{bk}\varphi_{2\alpha(x-x_m)} + \frac{2q}{bk}\varphi_4 + \frac{\Delta q}{bkl}(1-\varphi_1) \\
M &= \frac{bky_o}{2\alpha^2}\varphi_3 + \frac{bk\vartheta_o}{4\alpha^3}\varphi_4 + M_o\varphi_1 + \frac{Q_o}{2\alpha}\varphi_2 - \frac{p_i}{2\alpha}\varphi_{2\alpha(x-x_p)} \\
&\quad + mi\varphi_{i\alpha(x-x_m)} - \frac{q}{2\alpha^2}\varphi_3 - \frac{\Delta q}{4\alpha^3 l}\varphi_4 \\
Q &= \frac{bky_o}{2\alpha^2}\varphi_2 + \frac{bk\vartheta_o}{2\alpha^2}\varphi_3 + \alpha M_o\varphi_4 + Q_o\varphi_1 - p_i\varphi_{1\alpha(x-x_p)} \\
&\quad - 2mi\varphi_{4\alpha(x-x_m)} - \frac{q}{2\alpha}\varphi_2 - \frac{\Delta q}{4\alpha^3 l}\varphi_3
\end{aligned}
\qquad (3.31)
$$

此即为弹性地基梁的挠曲微分方程式(3-7)的一般解

3.5 算例

[例题3.1]如图3.17所示，两端自由的弹性地基梁，长l=4m，宽b=0.2m，EI=1333×103N、m2，地基的弹性压缩系数K=4.0×104kN/m3,求梁1、2及3截面的弯矩。

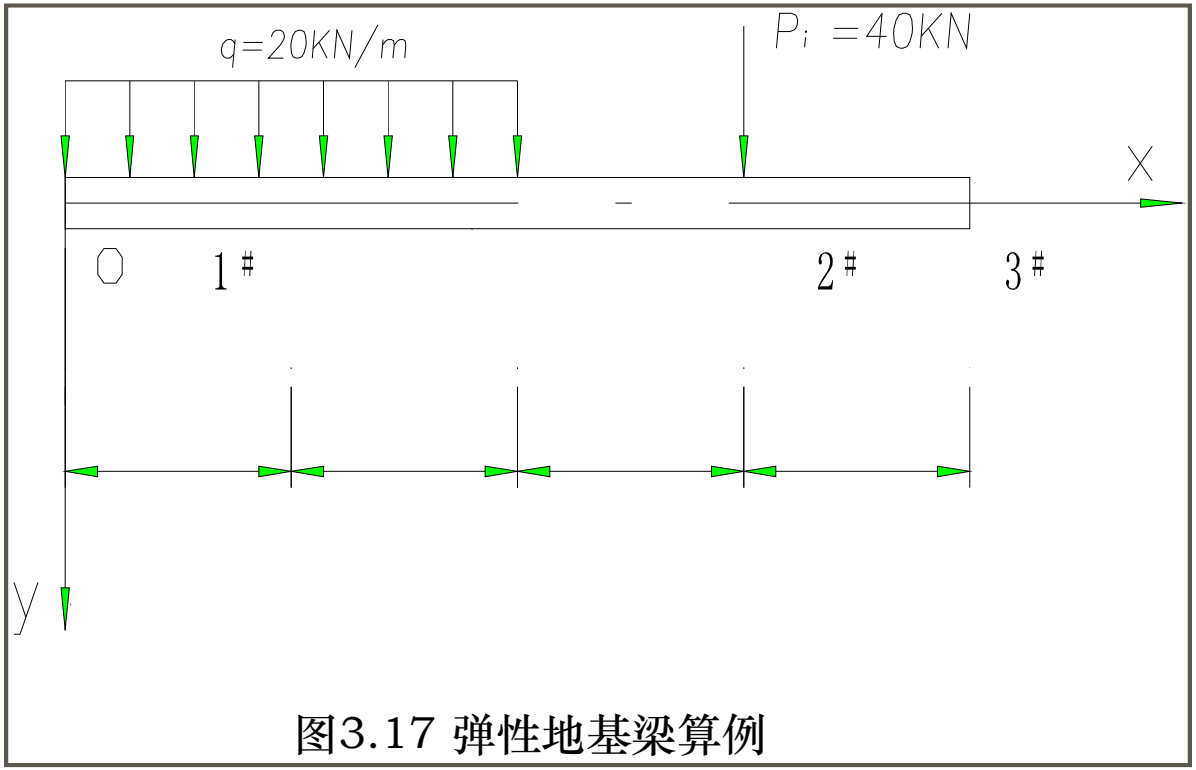


图3.17 弹性地基梁算例

解：（1）判断梁的类型

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{bk}{4EI}} = 1.1067(1/m)$$

考虑集中载距右端为1m，$\alpha\ell \angle 2.75$ ，故属短梁。

（2）计算初参数

$$\text{梁左端条件}\begin{cases} M_o = o \\ Q_o = o \end{cases}$$

$$\text{梁右端条件}\begin{cases} M_\ell = o \\ Q_\ell = o \end{cases}$$

据式（3.31）中M、Q表达式为

$$M_\ell = \frac{bk}{2\alpha^2} y_o \varphi_{3(\alpha\ell)} + \frac{bk}{4\alpha^3} \vartheta_o \varphi_{4(\alpha\ell)} - \frac{p_i}{2\alpha} \varphi_{2\alpha(\ell-3)} + \frac{q}{2\alpha^2}\left[\varphi_{3\alpha(\ell-2)} - \varphi_{3\alpha(\ell-o)}\right] = o$$

$$Q_\ell = \frac{bk}{2\alpha} y_o \varphi_{2(\alpha\ell)} + \frac{bk}{2\alpha^2} \vartheta_o \varphi_{3(\alpha\ell)} - p_i \varphi_{1\alpha(\ell-3)} + \frac{q}{2\alpha}\left[\varphi_{2\alpha(\ell-2)} - \varphi_{2\alpha(\ell-o)}\right] = o$$

将各数值代入后得

$$-32238y_o - 10343\vartheta_o + 78.492 = o$$
$$-41601y_o - 29130\vartheta_o + 99.412 = o$$

解之得$\begin{cases} y_o = 2.4729\times10^{-3}(m) \\ \vartheta_o = -1.1891\times10^{-4}(rad) \end{cases}$

（3）计算各截面的弯矩

$$M_{1\#} = \frac{bk}{2\alpha^2}y_o\varphi_{3(2\cdot1)} + \frac{bk}{4\alpha_3}\vartheta_o\varphi_{4(2\cdot1)} - \frac{q}{2\alpha^2}\varphi_{3(1\cdot o)} = -266(N\cdot m)$$

$$M_{2\#} = \frac{bk}{2\alpha^2}y_o\varphi_{3(2\cdot3)} + \frac{bk}{4\alpha^3}\vartheta_o\varphi_{4(2\cdot3)} - \frac{p_i}{2\alpha}\varphi_{2\alpha(3-3)}$$
$$+\frac{q}{2\alpha^2}\left[\varphi_{3\alpha(3-2)} - \varphi_{3\alpha(3-o)}\right] = 8135(N\cdot m)$$

$$M_{3\#} = \frac{bk}{2\alpha^2}y_o\varphi_{3(2\cdot4)} + \frac{bk}{4\alpha^3}\vartheta_o\varphi_{4(2\cdot4)} - \frac{p_i}{2\alpha}\varphi_{2\alpha(4-3)}$$
$$+\frac{q}{2\alpha^2}\left[\varphi_{3\alpha(4-2)} - \varphi_3\alpha_{(4-o)}\right] = o$$

[例题3.2]已知弹性地基梁DE，长度l及弹性特征系数α为已知，作用荷载如图3.18所示，如果$\alpha\ell_{\overline{DA}}$与$\alpha\ell_{\overline{CE}}$均≥2.75，试求截面的挠度$y_i$、转角$\vartheta_i$、弯矩$M_i$及剪力 Q_i。

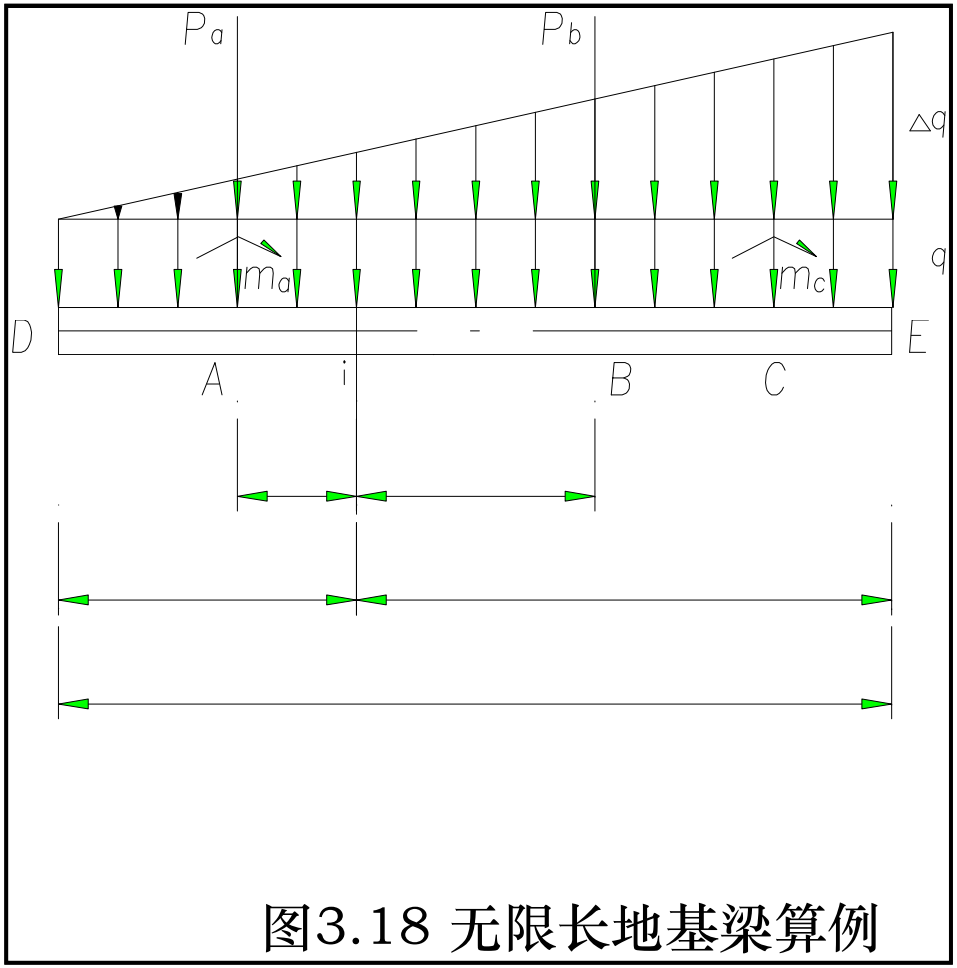


图3.18 无限长地基梁算例

解：（1）由于 $\alpha\ell\overline{DA}\geq 2.75$及$\alpha\ell\overline{CE}$均$\geq 2.75$ ，故为无限长梁。

（2）求出每一荷载单独作用下地基梁的内力和变形，然后再叠加得出地基梁总内力和总变形。应当注意，对于集中力作用情况，要分清所求截面是作用点左边，还是右边，如所求截面在作用点左边，则需将所求得的相应项改变符号。

由式（3.33）和式（3.34）得

$$y_i=\frac{\alpha p_a}{2bk}\varphi_{7(a\cdot a)}+\frac{\alpha^2 m_a}{bk}\varphi_{8(a\cdot a)}+\frac{\alpha p_b}{2bk}\varphi_{7(a\cdot b)}$$
$$-\frac{m_c\alpha^2}{bk}\varphi_{8(a\cdot c)}+\frac{q}{bk}+\frac{\Delta q}{bk\ell}d$$

$$\vartheta_i=-\frac{\alpha^2 p_a}{bk}\varphi_{8(a\cdot a)}+\frac{\alpha^3 m_a}{bk}\varphi_{5(a\cdot a)}+\frac{\alpha^2 p_b}{bk}\varphi_{8(a\cdot b)}$$
$$+\frac{\alpha^3 m_c}{bk}\varphi_{5(a\cdot c)}+\frac{\Delta q}{bk\ell}$$

$$M_i=\frac{p_a}{4\alpha}\varphi_{5(a\cdot a)}+\frac{m_a}{2}\varphi_{6(a\cdot a)}+\frac{p_b}{4\alpha}\varphi_{5(a\cdot b)}-\frac{m_c}{2}\varphi_{6(a\cdot c)}$$

$$Q_i=-\frac{p_a}{2}\varphi_{6(a\cdot a)}+\frac{m_a\alpha}{2}\varphi_{7(a\cdot a)}+\frac{p_b}{2}\varphi_{6(a\cdot b)}-\frac{\alpha m_c}{2}\varphi_{7(a\cdot c)}$$

作业

选项1）思考题4道全写

选项2）思考题2道，1道习题3

The end

文件名格式：班级 学号 姓名 简略实验名称

邮件标题同文件名

Any questions please 发送至

xingzhengwu@163.com