

DOI: 10.16285/j.rsm.2019.1355

特定场地地下土工构筑物的几何可靠性分析

吴兴征¹, 王瑞凯¹, 辛军霞^{2,3}

(1. 河北大学 建筑工程学院, 河北 保定 071002; 2. 北京市建筑工程研究院, 北京 100039;
3. 北京市建设工程质量第一检测所有限责任公司, 北京 100039)

摘 要: 针对特定场地地下土工构筑物的正常使用极限状态, 采用近年发展的几何可靠性方法计算了多种构筑物的可靠度指标。考虑同一场地下钻孔灌注桩、抗浮锚杆和 CFG 桩单桩加载变形测试曲线的离散性, 各曲线回归参数呈现差异并可作为随机变量, 进而探讨了各曲线回归参数间的相关性及联合分布特性。基于这些回归参数的联合发散概率密度等值线, 即随机变量刚好达到极限承载能力状态, 该几何可靠性算法可在随机变量的原始空间求得土工构筑物的可靠度指标。通过对比该几何可靠度指标与常规的一次可靠性算法成果, 验证了该几何可靠性计算技术的可行性。计算表明, 几何可靠性评价模型实施简便, 易于被工程技术人员接受。

关键词: 离散性; 概率密度; 拟合优度; 承载能力; 几何可靠性

中图分类号: Tu473

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2020)06-0000-11

Geometric reliability analysis of geotechnical structures at a specific site

WU Xing-zheng¹, WANG Rui-kai¹, XIN Jun-xia^{2,3}

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Hebei University, Baoding, Hebei 071002, China;
2. Geotechnical Engineering Group, Beijing Building Construction Research Institute, Beijing 100039, China;
3. Beijing Construction Engineering Quality First Testing Institute Co., Ltd., Beijing 100039, China)

Abstract: According to the serviceability limit state of geotechnical structures at a specific site, the reliability index of various structures is calculated by a newly developed geometric reliability method. At the same site, considering the scatter of the load-displacement curves of bored piles, anti-floating anchors and CFG piles, the regression parameters of these curves show differences and can be regarded as random variables. The correlations and joint distribution characteristics of the site-specific regression parameters are discussed. Based on the joint dispersed probability density contour (PDC) of these regression parameters, that is, the random variable just reaches the critical limit bearing capacity state, the reliability index of the geotechnical structure is calculated by the geometric reliability algorithm in the original space of the random variable. The feasibility of the geometric reliability algorithm is verified by comparing the calculated geometric reliability index with the results by the conventional first-order reliability method. The computed results show that the geometric reliability evaluation model is simple to implement and can be easily accepted by engineers and technicians.

Keywords: scatter; probability density; goodness-of-fit; bearing capacity; geometric reliability

1 引 言

由于土体具有空间变异性, 特定场地地下设置于土体中构筑物的多个(或数十个)荷载变形测试曲线各异, 表现出一定的离散性^[1]。学者们通常首先将每一测试曲线采用线性或非线性(双曲线、幂函

数或指数函数)回归来拟合, 并考虑或假设这些回归参数间的相关性^[2], 进而构建场地内多个(或数十个)回归参数的联合分布来间接地描述曲线之间的离散性。由此, 场地水平下荷载-位移曲线的不确定性转化为曲线回归参数的离散性来处理, 这些参数组成一个随机向量。若构建关于随机向量的极限

收稿日期: 2019-08-05

基金项目: 河北省自然科学基金面上项目(No.E2019201296); 河北省高等学校科学技术研究重点项目(No.ZD2018216); 一省一校专项资助(No.801260201262)。

This work was supported by the Hebei Natural Science Foundation of China (E2019201296), the key project of science and technology research in Colleges and Universities of Hebei Province (ZD2018216) and the Advanced Talents Incubation Program of the Hebei University (801260201262).

第一作者简介: 吴兴征, 男, 1971 年生, 博士, 副教授, 主要从事岩土、防洪与海岸工程中不确定性模型方面的研究。

E-mail: xingzhengwu@163.com

状态方程,进而可由一次可靠性法或蒙特卡罗(Monte Carlo)法求解构筑物承载的失效概率。蒙特卡罗法概念简明,但必须保证足够大的样本数量来估算失效概率。一次可靠性法(first-order reliability method,简记为FORM)是目前被工程界广泛接受的方法之一,它是在随机变量的正态空间中构建的^[3]。

从几何上讲,一次可靠性方法中定义的可靠度指标是在n维正则化空间中由坐标原点到临界破坏面的最短距离^[4],该指标亦称为Hasofer-Lind指标。Low和Tang^[5]提出了基于电子表格(微软Excel)的优化求解方法。尽管该算法在计算精度上可满足工程要求,对于可靠性分析中的非正态随机变量,必须采用当量正态化的方法将非正态随机变量‘当量’为正态变量^[6],该变换使得随机分布的尾部特性不能较好地体现(Robinson, 1998)^[7],这无疑为可靠性分析带来难以控制的误差。同时,当量正态化转换也牺牲了算法的直观性和可用性。为改进这一优化求解算法的实用性和简洁性,Low和Tang^[8]尝试在常用的EXCEL软件中通过内嵌的规划求解器进行优化实施,且算法无需计算随机变量等效的均值和标准差。对于非正态分布变量,他们的算法引入了累积概率分布函数的逆变换以及等效标准正态分布向量,使得模型参数的物理意义稍欠明晰。

为更好地在实际工程中推广使用可靠性方法,学者们致力于在随机变量的原始空间内,定义与解释可靠度指标^[5, 8-11]。其中,Low和Tang^[5]进一步将Hasofer-Lind指标的几何定义延伸,采用扩张椭球体的观点重新解释了可靠度指标的几何意义,多被称为椭球法。国内有些学者将该椭球技术应用于工程结构物的可靠性评价中^[12-13]。Winterstein等人^[11]基于一次逆可靠性分析的原理,给出海洋结构物在满足特定重现期响应下的海况(极端载荷)概率密度等值线,并建立了环境变量等值线(Environmental Contour)法。应指出,该算法在求解环境变量的条件分布函数及其逆函数时效率较低。然而,这些基于概率密度等值线的技术与方法在土木工程领域的成功应用,时刻激励着研究人员借鉴此技术完善构筑物的概率设计理论。在基于几何可靠性的基本框架下,若推求出回归参数的联合概率密度(包括参数化和非参数化)等值线,并在安全域内(达到临界状态前)得到等值线的最大解,这可直观地定义几何可靠度指标,并将有效避免当量正态化问题,也为研究构筑物的可靠性评估提供新的视角。

因而,Wu^[10]进一步拓展了椭球法,这里称作

几何可靠性分析法或基于概率密度等值线(面)的可靠性分析法。若以两个变量的问题为例,它是将可靠度指标的几何意义转化为两个几何多边形接触问题的求解。即将概率密度水平逐步的降低,使得概率密度等值线(定义为主多边形)逐步扩展,直至与极限状态线(定义为副多边形)相切(或接触)。该技术建立在随机变量的原始空间(具有明确物理意义的空间或称为广义空间)中,概念上直观,涉及到的极限状态方程曲线、概率密度等值线以及它们的接触求解均可在R平台(R Development Core Team, 2013; <https://www.r-project.org/>)^[14]下实时绘图展现与实施。若将极限状态线和概率密度等值线进行离散化近似,这使得算法的通用性增强。比如,各种概率密度等值线,即参数化的和非参数化的联合密度函数均适用。

这里,拟将上述几何可靠度指标的直观定义与概念引入至土工构筑物的承载能力可靠性分析中,以验证几何可靠性分析技术的可行性与正确性。分别以京畿地区三个场地(顺义、后沙峪、燕郊上上城)为例,采用相应土工构筑物(钻孔灌注桩、抗浮锚杆、CFG桩单桩)的现场加载位移测试数据(共697组),首先探讨测试曲线的两个回归参数间的相关性及联合分布特性,进而构建与推求发散的可靠度等值线,结合承载能力极限状态方程求出几何可靠度指标。最终,与常规一次可靠性计算成果进行比对以验证该项技术的适用性。

2 可靠性算法

土工构筑物安全性评价中,可靠性算法因考虑基本设计变量的不确定性,进而克服了传统确定性安全系数法的缺陷。同时,可靠性分析方法继承了定值安全系数的概念,通常基于极限平衡原理建立极限状态方程并求得构筑物的可靠度指标或失效概率。

2.1 构筑物的极限状态方程

对于承载力极限状态(ULS)设计,各种构筑物的功能函数或极限状态方程可定义为^[2]

$$g_f = Q_{ult} - Q_{LD} \quad (1)$$

式中: Q_{ult} 为极限承载力; Q_{LD} 为实际(或设计)施加荷载。

若构筑物的容许承载力 Q_{ua} 已知,相应的正常使用极限状态(SLS)设计的功能函数可方便地定义为

$$g_f = Q_{ua} - Q_{LD} \quad (2)$$

该功能函数表明，当构筑物承受的实际荷载 Q_{LD} 大于容许荷载 Q_{ua} 时认为构筑物失效。

基于传统安全系数 F_s 的定义，设计加荷与承载能力之间的关系可写为

$$Q_{LD} = \frac{Q_{um}}{F_s} \quad (3)$$

式中： Q_{um} 为名义的承载能力。在土工基础设计中，使用名义参数可能更接近其平均效应。

以正常使用极限状态分析为例，实测的荷载位移曲线可为构筑物的可靠性评价奠定基础。当给定容许位移值 S_a 时，可由实测数据获得相应于该位移的容许荷载值 Q_{ua} 。当实测的荷载位移曲线采用幂函数回归的情况下， Q_{ua} 可表达为

$$Q_{ua} = p_1 S_a^{p_2} \quad (4)$$

式中： S_a 为容许位移值，可事先给定； p_1 和 p_2 分别是某条加载-沉降曲线幂函数拟合的两个参数之一。其中 p_1 为加载系数，且为正值，其大小取决于加载水平。 p_2 为幂指数，且为非负值；理论上讲，其值应该小于 1 相应于 Q 与 S 呈凸曲线（等于 1 时为 Q 与 S 呈线性关系）。当考虑特定场地下多条测试曲线时，参数集 p_1 和 p_2 可视作基本随机变量。

一旦定义了随机变量，可通过求解极限状态方程 (2)，得到构筑物的失效概率 (p_f) 或可靠度指标 (β)。如 Wu^[15] 指出，可靠度指标可由随机抽样法、一次可靠性法和几何可靠性法进行求解，且在 R 语言平台下更易于实施这些算法。文献[15]基于 R 语言平台给出了这些算法的源代码，便于推广使用。

2.2 随机抽样算法

在随机抽样方法中，将基本随机变量的参数对 (p_1, p_2) 代入式 (4) 并导出 Q_{ua} 。重复该过程产生 N 个 (p_1, p_2) 的 Q_{ua} 样本，最终计算失效概率 p_f ，即 N_f / N ，其中 N_f 为满足 $Q_{ua} > Q_{LD}$ 的样本数量。如果方程 (2) 中的变量是服从正态分布的，则可通过逆变换，即 $\beta = -\Phi^{-1}(p_f)$ ，其中 Φ^{-1} 表示逆标准正态累积函数，进而得到可靠度指标。如果该函数遵循对数正态分布，限于篇幅，不再给出可靠度指标的表达式，读者可参考文献[16]。

这些参数对 (p_1, p_2) 可由常规的蒙特卡罗抽样法或基于 Copula 函数的模拟法 (Copula-based sampling method, 简记为 CBSM)^[17] 得到，后者在实施多种相依特性的联合变量时具有优势。

2.3 一次可靠性算法

各种近似数值算法，如简称为 FORM 的一次可

靠度方法 (Hasofer 和 Lind, 1974; Ang 和 Tang, 1990; Phoon 和 Kulhawy, 2008)^[4, 18-19]。该方法的理论及计算实施等细节可在相关文献中找到 (Baecher 和 Christian, 2003)^[20]，此不赘述。

2.4 几何可靠性算法

等概率密度演化方法^[10] (contour-based evolution method, 简记为 CBEM) 在随机变量的原始坐标空间内定义了可靠度指标 β 。它的数值等于发散距离 L_d (由平均值到设计点) 和内核距离 L_c (由平均值到伪设计点) 之间的比，也就是 $\beta = L_d / L_c$ ，即分别对应于刚达到临界破坏面的发散概率密度等值线 (probability density contour, PDC) 和一倍标准差 PDC。以二维正态分布空间为例，一个倾斜的椭圆 (由两个随机变量的均值、标准差、以及其相关系数而定义)，按比例扩张直至与临界状态线 (由极限状态方程给定) 相切时，椭圆中心 (均值点) 到相切点 (亦称为设计点) 的距离为发散距离 L_d 。均值点与设计点的连线与一倍标准差相应的椭圆 (或核概率密度等值线) 相交，交点为伪设计点，由均值点到伪设计点的距离为核距离 L_c ，如图 1 所示。可见，发散 PDC 相应于 β 倍的标准差椭圆。若两变量间的相关系数发生变化，椭圆的倾向亦会发生偏转。事实上，该算法容易推广应用到任何二维非正态空间中，比如，采用灵活的关联函数 (Copula) 法构建概率密度表达列式，该函数可用于构造多种相依结构的二元联合分布^[10, 17, 21]。具体的要点拟在下面给出。

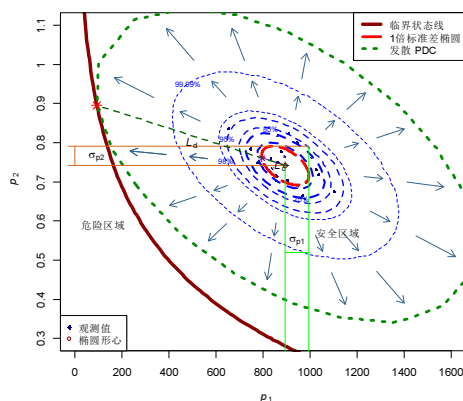


图 1 概率密度等值线和可靠度指标的几何定义
Fig.1 Probability density contours and a definition of the geometric reliability index

应指出，在 CBEM 中，单倍标准偏差椭圆是用于定义核距离 L_c 。若两个随机变量不服从正态分布时，这一椭圆与相应的非参数化核密度定义的轮廓

有差异,这会导致可靠度指标的某种高估或低估。考虑到椭圆模式多与工程系统的均值状态相一致^[10],且该模式在定义几何可靠度指标时的简便性,这里被采用。

3 几何可靠性分析中的几个要点

以土工构筑物荷载-位移非线性响应的不确定性为研究对象,在几何可靠性算法中,随机变量(响应曲线回归参数集)间的最优联合分布、PDC的确定、极限状态线的定义是求解可靠度指标的关键环节。

3.1 最优分布拟合的检验方法

通过 R 语言平台^[14],调用包‘fitdistrplus’^[22]中的 fitdist 函数分别对几个常用边缘分布概型(Gaussian 或 Normal, Log-normal, Gamma, Gumbel, Weibull)来实现概率密度检验。

在预估边缘分布参数的基础上,调用包‘copula’^[23]中的 fitcopula 函数分别对几个常用联合分布概型(Gaussian 或 normal, Clayton, Frank, Gumbel)来实现拟合检验。

无论最优边缘分布还是联合分布,均可通过 AIC 信息准则(Akaike Information Criterion)^[24]来选择最佳匹配概型。该准则中的 AIC 值可写为:

$$AIC = -2\ln(\tilde{L}) + 2s \quad (5)$$

式中: \tilde{L} 是拟合模型的似然函数最大值, s 是模型参数的总数(在本研究中边缘分布时 $s=2$,联合分布时 $s=1$)。具有最小 AIC 值的概型为最优统计模型。

3.2 概率密度等值线的确定

由前述可知,在几何可靠性算法实施中,概率密度等值线 PDC 在安全域内发散的程度便可定义几何可靠度指标。常概率密度轮廓线,即二元联合置信区域可由非参数核密度估计^[25]确定,这一曲线包络了特定百分比 $(1-\alpha)\times 100\%$ 的样本在内。任意置信水平下的 PDC 均可由 R 语言‘emdbook’包^[26]中的 HPDregionplot 函数^[27]方便地构造。随着置信水平的提高,PDC 的区域面积逐步增加。相对于不发生变化的极限状态几何构型,该等值线将在几何可靠度指标求解过程中发生改变,这里称为主多边形。而下述的极限状态线因在求解过程中不发生改变将称为副多边形。

若 PDC 被离散成多个顶点的连线,无论这些顶点被连接成什么形状,它们的轮廓都是近似的。但

随着顶点数量的增加,轮廓线将无限逼近实际的 PDC 形状。这种离散化体现了采用各种回归参数输入形式(比如,参数或非参数联合分布)的灵活性。

3.3 极限状态线的定义

极限状态线可由显式或隐式表达的极限状态方程通过变动参数分析得到^[28]。当有两个随机变量的情况下,需要将其划分为若干组合。比如,随机变量 p_1 的大小不同,特定位移下构筑物的荷载容许值 Q_{ua} 不同,进而与承受的实际荷载 Q_{LD} 的比值 F_s 各异,对于随机变量 p_2 也是这样。假如将变量 p_1 划分为 n 个等级(且 $i=1, \dots, n$),而将变量 p_2 划分为 m 个等级(且 $j=1, \dots, m$),这样共有 $n\times m$ 个组合。在某一特定的变量 p_1^i 和变量 p_2^j 下,求解其容许值 $F_s^{i,j}$,这也就意味着要进行 $n\times m$ 个组合运算。同样地,计算其它变量组合下构筑物的安全系数值 F_s 。从而可将各种变量组合下构筑物的安全系数值 F_s 绘制成一条曲线(或一个曲面),简记为 $F_s = f(p_1, p_2)$,也可由三元组表征 $(p_1^i, p_2^j, F_s^{i,j})$ 。该极限状态曲线的确定可采用 R 语言中的通用 contour(p_1, p_2, F_s)函数来实施。图 2 给出当安全系数值 F_s 分别设定为 0.5、1.0、1.2、1.5、2.0 和 3.0 时的极限状态线。当 F_s 取为 1.0 时,图中交叉符号示意了极限状态线上的十个离散点。因该曲线构建于随机变量的物理空间中,它可直观地展现在各种变量组合工况下构筑物的安全状态。

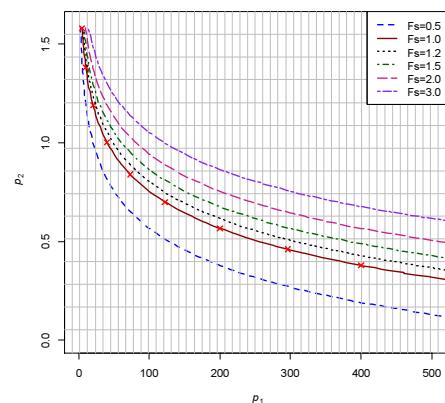


图 2 极限状态线的确定示意
Fig.2 Illustration of the limit state curve

3.4 算法实施

主副几何多边形(构型)的离散化近似并不限于一些规则的几何体,这一技术使得几何可靠性算法具有广泛的适用性。扩散的 PDC(主构型)逐步扩展,直到与极限状态曲线(副构型)相切(或刚好相交)。具体的相交算法可以采用两种技术实施:

其一，采用 R 包 'ptinpoly'^[29] 中的 pip2d (vertices2d, Queries2d) 函数来判断一个点是否在多边形内（即相交）。PDC 的离散顶点组成一个多边形（主构型，可定义变量 vertices2d），遍历极限状态曲线（副构型，可定义变量 Queries2d）的离散点来实现相交判断。一旦相交，该函数值将返回为真。其二^[10]，采用 R 包 'gpplib'^[30] 中的 gpc.poly 函数可以实现多边形裁剪算法，即通过判别主副构型的交叉面积来确定相交点，一旦交叉面积大于零即返回交叉点。因前一种包含测试的算法可以在两变量和三变量情况下都是适用的，本研究中被选用。

几何可靠度指标度量了回归参数概率密度与极限状态函数之间的偏差。计算所需可靠度指标的有效精度与 PDC 的发散增量大小（概率密度水平变化量）有关，它同时也决定了算法的收敛速度。此外，将主副几何构型离散化为具有一定数量顶点的多边形，比如 100 至 200 个，离散顶点的个数也会影响算法的求解速度。笔者结合数十个算例的计算表明，该算法均可在数秒内完成两变量可靠度指标的求解。

4 特定场地下荷载变形数据

土工构筑物通常与其周围土体共同形成承载体。由于土体受到地质成因、应力历史、沉积结构、颗粒组成和化学矿物等多种因素的影响，同一场地下构筑物的响应特性也会表现出较大的不确定性。以下给出北京市建设工程质量第一检测所地基室近年来完成的京畿地区三个场地（钻孔灌注桩、锚杆、CFG 桩单桩）的荷载变形测试成果^[31]。文献[31]综合分析了特定场地下荷载变形曲线的离散性，特别探讨了给定荷载下变形量值的概率密度分布和给定变形下荷载量值的概率密度分布。在本项研究中，仍以这些测试数据为例，重点探讨回归参数间的联合概率分布特性。

这里采用两参数回归形式（双曲线或幂函数），对测试数据进行幂函数和双曲线拟合，进而求出相应的回归参数。当采用幂函数拟合时，荷载-位移关系可由前述方程(4)给出。当采用双曲线拟合时，包含两个回归参数参数 h_1 和 h_2 ，其荷载-位移曲线可写为：

$$Q = \frac{S}{h_1 + h_2 * S} \quad (6)$$

式中： S 为位移量，单位为 (mm)； Q 为荷载值，单位为 (kN)； h_1 和 h_2 是双曲线拟合参数的荷载位

移曲线。这些曲线拟合参数在物理上是有意义的， h_1 和 h_2 倒数分别等于初始斜率和渐近值。

4.1 钻孔灌注桩

钻孔灌注桩竖向抗压承载力检测项目位于北京市顺义区南法信镇，依据基桩检测规范^[32]，共进行了 23 个荷载沉降测试。该场地岩土勘探深度达到 35 m，按地质成因和沉积年代，地层可依次划分为人工堆积层、新近沉积层和第四纪全新世冲洪积层。地下水埋深 3.3~6.7 m。这些桩的桩径为 500 mm，有效桩长为 29 m，最大测试加载均为 3 800 kN。经该桩基处理后的地基用于办公、展厅、仓储三位一体的两层物流商务设施的基础。

图 3 由左至右依次给出：(A) 荷载沉降测试曲线、(B) 双曲线回归参数 h_1 和 h_2 散点图、(C) 幂函数回归参数 p_1 和 p_2 散点图。这里假设每个测点的曲线在该场地下是统计独立且同分布的。由图 3(a) 可见，每一条测试曲线均呈非线性关系，即随着位移的增加承载力的变化梯度有所减缓。由图 3(b) 和图 3(c) 可以看出，回归参数间均呈现负相关特性。即随着其中一个参数值的增加，另外一个参数的量值减小。

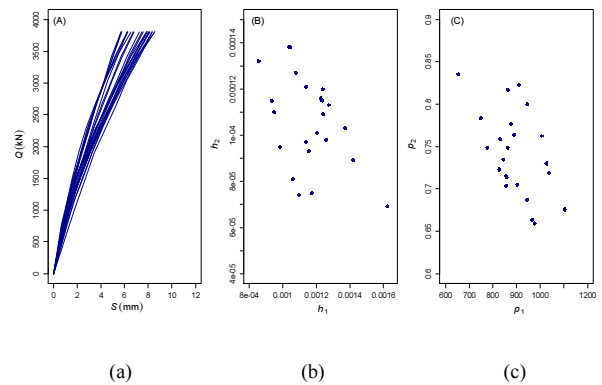


图 3 顺义场地灌注桩的荷载沉降、双曲线回归参数及幂函数回归参数的散点

Fig.3 Bored piles at Shunyi site: (a) load settlement curves; (b) scattered hyperbolic regression parameters; (c) scattered power law regression parameters

4.2 抗浮锚杆

锚杆抗拔承载力检测项目位于北京顺义区后沙峪村，共计完成了 620 个荷载位移测试。场地的地质条件与前述钻孔灌注桩的类似。由于该场地具有较高的地下水位，为有效解决地下停车场的抗浮稳定问题，设置了大量抗浮锚杆并对其中的百分之五进行检测。这些锚杆的长度均为 7 m，采用拉杆配筋 1 根 HRB400，钢筋直径为 22 mm，钢筋截面

面积 A_s 取为 380.1 mm^2 ，最大测试加载为 93 kN 。

图 4(a)给出其荷载位移测试曲线。由图可见，这些加载-位移曲线各不相同，且随着沉降的增加，曲线的离散程度加大。这些曲线间的离散性是由于注浆体与土体间剪切强度的不确定性所致。需要指出，由于锚杆相比灌注桩和 CFG 桩单桩具有更高的刚度和强度，因此测得位移量值较小。图 4(b)和图 4(c)分别给出这些测试曲线由双曲线与幂函数回归而得到的参数散点分布。由图可见，回归参数间具有明显的负相关性。

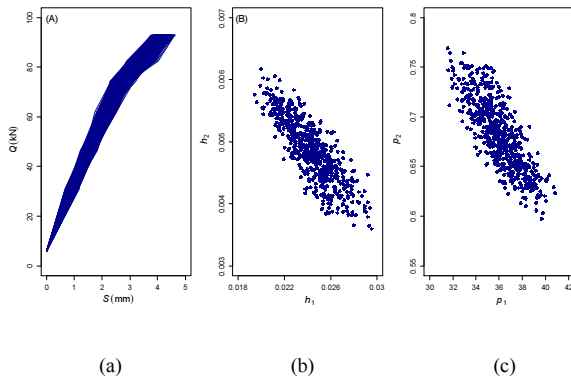


图 4 后沙峪场地锚杆的荷载位移、双曲线回归参数及幂函数回归参数的散点

Fig.4 Anti-floating anchors at Hou Shayu site: (a) load settlement curves; (b) scattered hyperbolic regression parameters; (c) scattered power law regression parameters

4.3 CFG 桩单桩

CFG 桩单桩竖向静载检测项目位于河北燕郊上上城，共计完成 54 个荷载沉降测试。该场地以粘性土为主，它由超固结颗粒、裂隙粘土和相对一致的地质沉积而形成。地下静水位埋深约在 17.1 m 左右。平均桩长 24.81 m ，桩径为 450 mm ，最大测试加载平均值为 $2\,031.78 \text{ kN}$ 。经该桩基处理后的地基

表 1 各场地土工构筑物荷载位移曲线回归参数间相关系数

Table 1 Correlation coefficients between regression parameters of load-displacement curves of geostuctures at each site

场地	测试数量	桩长 D/m		桩径 B/mm		最大位移量 S_{max}/mm		最大荷载 Q_{max}/kN		双曲线 (h_1, h_2)		幂函数 (p_1, p_2)	
		均值 μ	标准差 σ	均值 μ	标准差 σ	均值 μ	标准差 σ	均值 μ	标准差 σ	相关系数 ρ	相关系数 τ	相关系数 ρ	相关系数 τ
灌注桩	23	29	0	500	0	7.31	0.97	3 800	0	-0.45	-0.27	-0.52	-0.29
抗浮锚杆	620	7	0	22	0	4.17	0.17	93	0	-0.84	-0.64	-0.80	-0.60
CFG 桩单桩	54	24.81	0.9	450	0	16.45	3.5	2 031.78	40.63	-0.17	-0.15	-0.60	-0.42

5 成果分析

5.1 最优边缘分布

各场地的双曲线回归参数 h_1 和 h_2 以及幂函数回归参数 p_1 和 p_2 可以分别看作一个随机变量，若它

用于二十余层的民用板楼基础。

图 5(a)给出该场地加载沉降测试曲线。可以看出，该场地的加载-位移曲线也存在较大的不确定性，且随着沉降的增加，曲线的离散性越显著。图 5(b)和图 5(c)分别给出双曲线回归参数及幂函数回归参数的散点分布情况。可以看出，两类回归形式的参数间均具有负相关特性，且幂函数回归的相关性更为显著些。

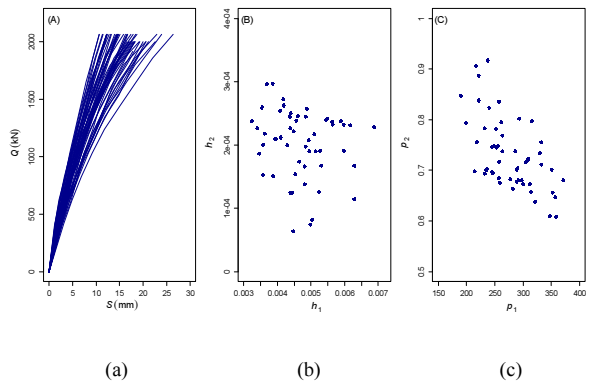


图 5 燕郊场地 CFG 桩单桩的荷载沉降、双曲线回归参数及幂函数回归参数的散点

Fig.5 Single piles of the CFG pile composite foundation at Yanjiao site: (a) load settlement curves; (b) scattered hyperbolic regression parameters; (c) scattered power law regression parameters

前述各场地土工构筑物的最大荷载和最大沉降的均值和标准差以及桩径、桩长的均值和标准差、曲线回归参数间相关系数(包括 Pearson 相关系数 ρ 和 Kendall 相关系数 τ)，如表 1 所列。由这些相关系数值可以看出，回归参数间均呈负相关，且锚杆场地相关系数的绝对值最大。

们服从候选两参数分布概型(包括正态 (Normal)、对数正态 (Log-normal)、伽玛 (Gamma)、耿贝尔 (Gumbel)、和威布尔 (Weibull))时，计算得到的相应 AIC 值，如表 2 所列。可看出，最优分布并不总是服从正态，尽管各分布相应 AIC 量值相差不大。

各场地回归参数若服从最优分布的情况下，表 3 给出这些分布中两个参数的具体值。表中同时给出假定服从正态分布的情况下参数值，包括均值 μ 和标准差 σ 。

尽管幂函数和双曲线模型都适用^[17]于这些荷载沉降曲线的回归拟合，考虑到双曲线回归参数的数量级过小，幂函数模型获得的回归参数在数学上

表 2 各场地回归参数服从多种分布下的 AIC 值
Table 2 AIC values for various distributions of regression parameters at each site

土工构筑物	分布类型	双曲线回归		幂函数回归	
		h_1	h_2	p_1	p_2
灌注桩	正态 (Normal)	-330.67	-429.94	280.30	-69.82
	对数正态 (Log-normal)	-331.90	-428.64	281.13	-70.06
	伽玛 (Gamma)	-331.65	-429.27	280.74	-70.01
	耿贝尔 (Gumbel)	217.17	217.07	1 451.86	219.65
抗浮锚杆	威布尔 (Weibull)	-179.08	-248.91	285.12	-67.02
	正态 (Normal)	-5 956.44	-7 647.42	2 484.74	-2 435.01
	对数正态 (Log-normal)	-5 957.73	-7 636.85	2 486.65	-2 437.91
	伽玛 (Gamma)	-5 958.50	-7 642.19	2 485.56	-2 437.34
CFG 桩单桩	耿贝尔 (Gumbel)	5 769.32	5 753.57	2 596.35	-2 387.07
	威布尔 (Weibull)	-5 874.77	-7622.13	2 554.50	-2 346.48
	正态 (Normal)	-606.99	-905.72	567.21	-129.37
	对数正态 (Log-normal)	-609.49	-886.80	565.94	-132.51
	伽玛 (Gamma)	-609.10	-894.79	566.02	-131.60

耿贝尔 (Gumbel)	504.87	504.24	569.15	-135.03
威布尔 (Weibull)	-601.10	-807.63	571.01	-103.79

注：表中下划线加粗字体为最优分布的 AIC 值。

更易于处理。因此，如下仅以幂函数模型为例进行分析。在原始物理空间中进行有关回归参数的其它文献^[2, 21]中也给出采用幂函数回归模型更合适。

5.2 最优联合分布

通过拟合优度检验求得多种备选 Copula (包括 Normal、Clayton、Frank 和 Gumbel Copula) 函数的最大似然值，进而得到相应的 AIC 值，如表 4 所列。采用两步极大似然估计法^[33]可得到 Copula 模型参数。由表中给出的 AIC 值可以看出，normal Copula 均是这些场地的最优联合分布函数。

应指出，表中 Clayton、Gumbel Copulas 参数中的反斜杠表示该参数是通过一个变量取负值来实现回归参数间正相关后计算得到的。

5.3 各场地最大加载值的确定

对于静态轴向载荷试验，多用于灌注桩和 CFG 桩单桩等桩型，其载荷逐级增加到其最大加载值 Q_{LD} 。最大施加载荷多由上部结构的设计工程师推荐，其值根据上部结构的特定载荷组合估算。例如，垂直载荷可由结构的重量 (静载) 和地震活动 (活载) 组成。这些数据也是桩基设计所必需的。一旦每根桩的加载值确定，场地内所有桩最大加载的统计值 (平均值和标准差) 即可得到。

表 3 各场地回归参数服从正态与最优分布时的模型参数

Table 3 Marginal parameters of the normal and best-fitted distributions to the regression parameters at each site

分布类型	土工构筑物	双曲线回归				幂函数回归			
		h_1		h_2		p_1		p_2	
		参数 1	参数 2	参数 1	参数 2	参数 1	参数 2	参数 1	参数 2
正态分布	灌注桩	11.61-e04	1.68-e04	1.06-e04	0.19e-04	893.29	98.25	0.74	0.05
	锚杆	0.02	19.78-e04	48.62e-04	5.06e-04	36.01	1.79	0.68	0.03
	CFG 桩单桩	46.85e-04	8.45e-04	2.03e-04	0.53e-04	275.94	44.52	0.73	0.07
最优分布	灌注桩	-6.77	0.14	1.06e-04	0.19e-04	893.29	98.25	-0.30	0.07
	锚杆	150.55	6201.25	48.62e-04	5.06e-04	36.01	1.79	-0.38	0.05
	CFG 桩单桩	-5.38	0.18	2.03e-04	0.53e-04	5.61	0.16	0.70	0.05

表 4 AIC 和最优联合分布的模型参数

Table 4 AIC values and model parameters of the best-fitted copulas

Type	AIC				Copula 参数			
	Normal	Clayton	Frank	Gumbel	Normal	Clayton	Frank	Gumbel
灌注桩	-5.08*	-3.71	-2.53	-3.17	-0.51	\0.65	-2.70	\1.39
抗浮锚杆	-614.53*	-428.86	-570.58	-598.52	-0.79	\1.52	-7.33	\2.29
CFG 桩单桩	-17.69*	-8.80	-17.61	-16.13	-0.55	\0.42	-4.20	\1.62

对于抗浮锚杆而言，其极限抗拔承载力 Q_{un} 可表达为：

$$Q_{un} = f_{pt} \times A_s \quad (7)$$

式中： f_{pt} 为锚杆杆体的抗拉强度标准值（kPa），可取为400 kPa； A_s 为截面面积（mm²）。 Q_{un} 的值可被认为是在现场锚杆所受拉（或压）力最大值 Q_{max} 的统计平均值。进而由式（3）可求得 Q_{LD} 。

本研究中，除非特别说明，桩的安全系数 F_s 设置为3（Phoon 和 Kulhawy, 2008）^[19]，而锚杆的安全系数 F_s 设置为2^[34]。

5.4 各场地的可靠度指标

采用几何可靠性法可以计算得到各场地的可靠度指标，如表5所列。在各场地的计算中，为验证几何可靠性法的正确性，这里采用常规的一次可靠性FORM法对这些场地的计算成果进行校验。由表5中给出的可靠度指标可看出，当采用双变量正态联合分布时，两种计算方法得到的计算成果较为接近。这从侧面说明，几何可靠性方法在分析构筑物承载特性上具有一定的精确性。

以下结合各场地进行详细描述。

表5 各场地不同构筑物的相应可靠度指标
Table 5 Computed reliability index of geotechnical structures at each site

构筑物类型	双变量正态联合分布时采用CBEM	最优拟合联合分布时采用CBEM	双变量正态联合分布时采用FORM
灌注桩	6.82	6.84	6.83
抗浮锚杆	7.32	7.29	7.27
CFG桩单桩	5.04	5.18	5.06

5.4.1 灌注桩

图6给出灌注桩场地由CBEM方法定义的可靠度指标。假设当回归参数对服从双变量正态分布的情况下，该图中的小虚线椭圆和大虚线椭圆分别表示单倍标准偏差椭圆和刚达到临界破坏面的PDC，二者的轮廓定义了可靠度指标。其中最粗的实线为边界线，设计点与伪设计点被标示，其它线在图中均有标注（下同）。可见，几何可靠性算法中对于可靠度指标的定义是透明的。计算实施和图形绘制均在R语言平台下进行，且定义在两个回归参数的原

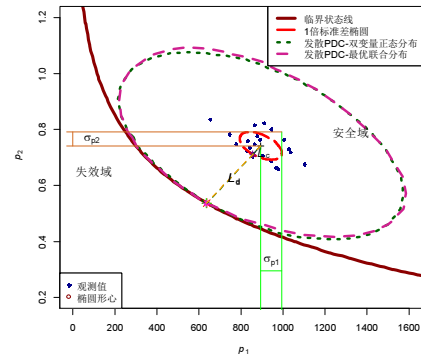


图6 顺义场地灌注桩的发散PDC和使用最佳拟合的可靠度指标的几何解释

Fig.6 Bored piles at Shunyi site: geometric interpretation of the dispersed PDC and the definition of the geometric reliability index for the copula used to best fit the observed data

始物理空间中。由此，工程技术人员可直观地掌握联合分布的特征、随机变量分布与桩基础的安全度的联系。图中同时给出当回归参数对服从最优联合分布时得到的发散PDC和相应的几何可靠度指标示意。由于发散的最优联合分布与双变量正态分布的PDC较为接近，因此，二者计算得到的可靠度指标较为接近。

5.4.2 锚杆

图7给出锚杆场地由CBEM方法定义的可靠度指标。图中同时给出双变量最优分布时定义可靠度指标的情况。可看出，无论是双变量正态分布的还是最优联合分布的发散PDC，所形成的图形与临界线接触点基本是一致的。这是由于该场地回归参数的最优联合分布与双变量正态分布较为接近所致。

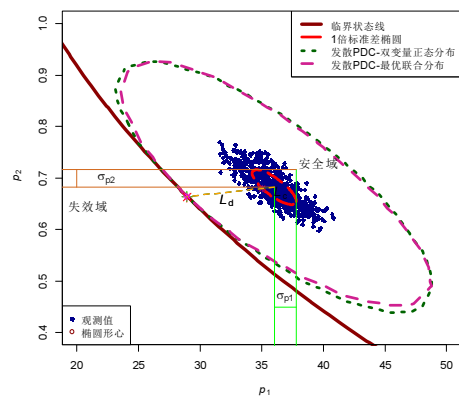


图7 后沙峪场地锚杆的分散PDC和使用最佳拟合的可靠度指标的几何解释

Fig.7 Anti-floating anchors at Hou Shayu site: geometric interpretation of the dispersed PDC and the definition of the geometric reliability index for the copula used to best fit the observed data

5.4.3 CFG 桩单桩

图 8 给出 CFG 桩单桩场地由 CBEM 方法定义

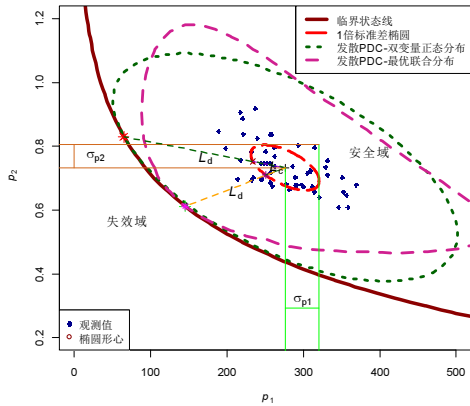


图 8 燕郊场地 CFG 桩单桩的分散 PDC 和使用最佳拟合的可靠度指标的几何解释

Fig.8 Single piles of the CFG pile composite foundation at Yanjiao site: geometric interpretation of the dispersed PDC and the definition of the geometric reliability index for the copula used to best fit the observed data

的可靠度指标。图 8 中还给出最优联合分布情况下的计算成果。可见,相应的发散 PDC 轮廓较不规则,这是由于最优边缘分布(p_1 服从对数正态和 p_2 服从耿贝尔)均与正态分布有差异所致。双正态分布与最优分布情况下得到的设计点相距较远,求得的可靠度指标也有较大差异。在双正态分布情况下的可靠度指标比最优分布时的量值小。

6 讨论

6.1 与椭球法的异同点

建议的几何可靠性算法是对已有的 Low 和 Tang 提出的椭球法拓展,并在 R 平台下完成了可靠度指标的图形展现。需要强调的是,两种算法在可靠度指标的定义上是有差异的。在椭球法中,若为两变量问题,几何可靠度指标定义为轴径比,即发散轴径与核心轴径之比,这里发散轴径由发散的椭圆定义,而核心轴径由核心椭圆(一倍标准差椭圆)定义。而这里建议的算法中,几何可靠度指标定义为距离比,即发散距离 L_d 与核心距离 L_c 之比,这里发散距离 L_d 与发散的 PDC 有关,为均值点至设计点的距离;核心距离 L_c 与核心椭圆有关,为均值点至伪设计点之间的距离。因而,椭球法中的轴径比被取代为本文算法中的距离比,这是两种算法在几何可靠度指标定义上的不同点。显然,当发散的 PDC 亦为椭圆(相应于双正态联合分布)这种特殊形式时,二者在可靠度指标定义上无

异。事实上,建议的算法,因允许发散的 PDC 为任意几何形状(相应于非正态联合分布或非参数化的联合分布),具有更为广泛的适用性。

6.2 与随机模拟法的简单比较

与普通的随机抽样算法相比,建议的方法在解决低失效概率水平下可靠度指标的求解方面具有优势。当然,近年学者们发展了高效的随机抽样算法,比如子集模拟法(Au 和 Beck, 2001)^[35],将总的样本计算量大幅降低。与子集模拟法相比,建议的算法更侧重于可靠度指标的表达与求解,即使对于极低失效概率水平的问题,相应的计算效率基本不受影响。况且,建议的几何可靠性算法给出了极限状态线和可靠度指标的直观展示策略,这可为岩土工程师理解和使用概率设计技术开辟一个新的途径。

6.3 算法的局限性

建议的算法目前仅适用于二维和三维随机变量的情形,高维问题因存在几何直观表达上的困难将是该算法的明显不足之处。对于极限状态方程为高度非线性的构筑物,使用该算法在准确定义并求解可靠度指标时需要进行更为精细的离散化近似处理。在使用 Copula 联结函数定义 PDC 及可靠度指标推求中,需借助于功能强大且开源的 R 语言平台提供的程序包,这或许成为工程技术人员推广与使用该算法的一个障碍。

7 总结

结合京畿地区三个典型场地的荷载位移测试成果,构建了回归参数集的联合概率密度等值线,并推求了正常使用极限状态线,进而得到各场地的几何可靠度指标。计算成果与常规的一次可靠性算法的结果大体一致,这说明几何可靠性算法在进行土工构筑物概率评估时是可行的。

几何可靠性算法因架构于随机变量的原始空间中,基本概念清晰,物理意义直观,这将会促进工程技术人员深刻领会可靠性理论并将其付之于实践。该算法不需要将非正态随机变量的当量正态化过程,并可采用 Copula 联结函数构建各种随机变量间的相关结构,由此建立的可靠性模型具有较高精度和拟合能力。应强调,该算法受限于在基本随机变量的低维空间中,即二维或三维。尽管这并不影响其在本研究中两个回归参数空间下的推广应用。

参考文献

- [1] TANDJIRIA V, TEH CI, LOW BK. Reliability analysis of

- laterally loaded piles using response surface methods[J]. **Structural Safety**, 2000, 22(4): 335-355.
- [2] 辛军霞, 吴兴征, 高伟, 等. 基于 Copula 函数的 CFG 桩复合地基载荷-变形曲线的概率分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(增刊 1): 424-434.
XIN Jun-xia, WU Xing-zheng, GAO Wei, et al. Copula-based analysis of load-displacement curves of cement-fly ash-gravel pile[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(Suppl.1): 424-434.
- [3] WU X Z. Assessing the correlated performance functions of an engineering system via probabilistic analysis[J]. **Structural Safety**, 2015, 52(PA): 10-19.
- [4] HASOFER AA, LIND AM. Exact and invariant second moment code format[J]. **Journal of Engineering Mechanics-ASCE**, 1974, 100(1): 111-121.
- [5] LOW BK, TANG WH. Efficient reliability evaluation using spreadsheet[J]. **Journal of Engineering Mechanics-ASCE**, 1997, 123(7): 749-752.
- [6] RACKWITZ R, FIESSLER B. Structural reliability under combined random load sequences[J]. **Computers & Structures**, 1978, 9: 489-494.
- [7] ROBINSON DG. A survey of probabilistic methods used in reliability risk and uncertainty analysis[R]. Technical report, Sandia National Laboratories, 1998. p34.
- [8] LOW BK, TANG WH. Efficient spreadsheet algorithm for first-order reliability method[J]. **Journal of Engineering Mechanics-ASCE**, 2007, 133(12): 1378-1387.
- [9] 贡金鑫, 赵国藩. 原始随机空间内结构可靠度的分析方法[J]. 水利学报, 1999(5): 30-34.
GONG Jin-xing, ZHAO Guo-fan. Structural reliability analysis in original random space[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 1999(5): 30-34.
- [10] WU X Z. Geometric reliability analysis applied to wave overtopping of sea defences[J]. **Ocean Engineering**, 2015, 109: 287-297.
- [11] WINTERSTEIN SR, UDE TC, CORNELL CA, et al. Environmental parameters for extreme response: inverse FORM with omission sensitivity[C]//Proceedings of the International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR-93, 1993. Innsbruck.
- [12] 符圣聪. 地震时埋设管道可靠度的实用算法[J]. 特种结构, 2004, 21(1): 36-40.
FU Sheng-cong. Practical calculating method of reliability index for embeded pipes during an earthquake[J]. **Special Structures**, 2004, 21(1): 36-40.
- [13] 吴振君, 王水林, 汤华, 等. 边坡可靠度分析的一种新的优化求解方法[J]. 岩土力学, 2010, 31(3): 713-718.
WU Zen-jun, WANG Shui-lin, TANG Hua, et al. A new optimization approach for slope reliability analysis[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(3): 713-718.
- [14] R Development Core Team. R: A language and environment for statistical computing[R]. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, ISBN: 3-900051-07-0. <http://www.R-project.org>. 2013.
- [15] WU X Z. Implementing statistical fitting and reliability analysis for geotechnical engineering problems in R[J]. **Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards**, 2017, 11(2): 173-188.
- [16] AYYUB BM, MCCUEN RH. Probability, Statistics, and Reliability for Engineers and Scientists[M]. Third edition, CRC press. 2013.
- [17] WU X Z. Probabilistic slope stability analysis by a Copula-based sampling method[J]. **Computational Geosciences**, 2013, 17(5): 739-755.
- [18] ANG AHS, TANG WH. Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Volume II, Decision, risk and reliability[M]. John Wiley, New York. 1990.
- [19] PHOON KK, KULHAWY FH. Serviceability limit state reliability-based design[P]. In: Reliability-based design in geotechnical engineering: Computations and applications, Taylor and Francis, London, 2008: 344-383.
- [20] BAECHER GB, CHRISTIAN JT. Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering[M]. Wiley, Chichester, UK. 2003.
- [21] WU X Z, XIN J X. Probabilistic analysis of site-specific load-displacement behaviour of cement-fly ash- gravel piles[J]. **Soils and Foundations**, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2019.07.003>.
- [22] DELIGNETTE-MULLER ML, POUILLOT R, DENIS JB, et al. fitdistrplus: Help to fit of a parametric distribution to non-censored or censored data[R]. R package version 0.3-4. 2011.
- [23] YAN J. Enjoy the joy of Copulas: with a package copula[J]. **Journal of Statistical Software**, 2007, 21(4): 1-21.
- [24] AKAIKE H. A new look at the statistical model identification[J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1974, AC-19(6): 716-723.

- [25] VENABLES WN, RIPLEY BD. Modern applied statistics with S(fourth edition)[M]. New York: Springer, 2002.
- [26] BOLKER B. Emdbook: Ecological models and data in R[R]. <https://cran.r-project.org/web/packages/emdbook>, 2013-04-14.
- [27] HU Z, YANG RC. A new distribution-free approach to constructing the confidence region for multiple parameters[J]. **PLoS ONE**, 2013, 8(12): e81179.
- [28] WU X Z. Development of fragility functions for slope instability analysis[J]. **Landslides**, 2015, 12(1): 165-175.
- [29] MAISOG JM, WANG Y, LUTA G, et al. Ptinpoly: Point-in-polyhedron test (2D and 3D)[R]. R package, version 2.0. 2012. <http://ptinpoly.pbworks.com>.
- [30] PENG RD. gpclip: General Polygon Clipping library for R [Computer software manual]. Available from <http://CRAN.R-project.org/package=gpclip> (R package version 1.4-4). 2009.
- [31] 吴兴征, 王瑞凯, 辛军霞, 等. 特定场地地下土工构筑物荷载变形曲线的概率密度分布[J]. 工程质量, 2017, 35(9): 41-46.
- WU Xing-zheng, WANG Rui-kai, XIN Jun-xia, et al. Probability density distribution of load deformation curves of geotechnical structures at a specific site[J]. **Construction Quality**, 2017, 35(9): 41-46.
- [32] 中国建筑科学研究院. JGJ106—2014 建筑基桩检测技术规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2014.
- China Academy of Building Research. JGJ 106—2014 Technical code for testing of building pile foundations[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2014.
- [33] JOE H. Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models[J]. **Journal of Multivariate Analysis**, 2005, 94: 401-419.
- [34] 岩土锚杆(索)技术规程 CECS22—2005. 北京: 中国计划出版社. 2005.
- Technical specification for ground anchors CECS22—2005[S]. Beijing: China Jihua Press, 2005.
- [35] AU SK, BECK JL. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. **Probabilistic Engineering Mechanics**, 2001, 16(4): 263-277.